Interpretare in modo critico l'informazione statistica

Il pensiero statistico è tanto necessario per la cittadinanza attiva, quanto l'abilità di leggere e scrivere. Partendo da questa considerazione, l'Istat si è posto l'obiettivo di accrescere la *statistical literacy* nelle giovani generazioni con diverse iniziative, dagli eventi ai prodotti editoriali e multimediali. In questo contesto, trovano spazio anche i laboratori ludico-didattici presentati in questo libro.

Il percorso proposto, iniziato dalla scuola dell'infanzia, si avvia verso la conclusione, con le attività rivolte alla scuola secondaria di primo grado, in linea con le *Indicazioni nazionali*:

"La scuola dell'infanzia, la scuola primaria e la scuola secondaria di primo grado costituiscono il primo segmento del percorso scolastico e contribuiscono in modo determinante all'elevazione culturale, sociale ed economica del Paese e ne rappresentano un fattore decisivo di sviluppo e di innovazione" (Miur, 2012, 13).

Al termine del primo ciclo di istruzione, gli studenti si ritrovano un bagaglio di esperienze e conoscenze che consentono loro di gestire in autonomia e con sicurezza le situazioni che caratterizzano la loro quotidianità.

In quest'ottica, la statistica contribuisce alla crescita del patrimonio di culturale, aiutando i ragazzi a orientarsi tra dati, tabelle e grafici, a interpretarli e a ricavare da essi le informazioni corrette sul fenomeno che si vuole conoscere.

Inoltre, la valutazione e l'interpretazione critica dell'informazione statistica, nonché la capacità di esprimere pensieri e opinioni, basandosi su contenuti quantitativi, costituiscono la via per dare fondamento alle proprie ragioni, sfatando i luoghi comuni e le percezioni fuorvianti. In sintesi, sono la base per una cittadinanza attiva e consapevole.

I *Traguardi per lo sviluppo delle competenze* prevedono che, al termine della scuola secondaria di primo grado, l'alunno analizzi e interpreti rappresentazioni di dati per ricavarne misure di variabilità e prendere decisioni. Nelle situazioni di incertezza (vita quotidiana, giochi, ecc.) si orienti con valutazioni di probabilità. Rafforzi un atteggiamento positivo rispetto alla matematica attraverso esperienze significative e comprenda come gli strumenti appresi siano utili in molte situazioni per operare nella realtà (Miur, 2012, 43).

Osservando in modo guidato le regole del caso, gli studenti possono arricchire le loro conoscenze rudimentali, approfondendo le differenti interpretazioni di probabilità e muovendo i primi passi nella misura dell'incertezza con l'aiuto della statistica.

I contenuti dei laboratori sono altresì pensati per valorizzare la trasversalità della statistica rispetto agli altri insegnamenti, favorendo la collaborazione tra classi e docenti e l'integrazione tra le diverse discipline scolastiche.

L'insegnante è accompagnato nella preparazione dei materiali e nella conduzione dell'attività. La parte introduttiva di ogni scheda mette in evidenza le informazioni necessarie per contestualizzare la proposta didattica. Seguono, le modalità di svolgimento, l'elenco dei materiali e gli allegati cartacei e digitali per l'analisi dei risultati dell'indagine o dell'esperimento.

Questo capitolo è stato scritto da
Monica Bailot, Sara Letardi e Susi Osti.

Scuola secondaria
di primo grado

Età: 11-14 anni
Durata: 2 ore

Contenuti: evento, incertezza, probabilità

Attività: decisioni in condizioni di incertezza e misure di probabilità degli eventi, rappresentazione di insiemi di dati

La probabilità a fagiolo

Sfida all’ultimo fagiolo!

Il caso ha le sue regole. Alcune di queste possono essere svelate con un semplice esperimento. Per avvicinare gli studenti ai concetti di evento elementare, spazio campionario, eventi indipendenti e distribuzione di probabilità, si propone un gioco basato sul lancio di due dadi. Come si può facilmente verificare, la probabilità che esca un numero da uno a sei nel lancio di un dado è pari a un sesto.
Nel laboratorio si osserva un evento più complesso. Lanciando due dadi, si valuta la probabilità della somma delle facce uscite, in una sfida all'ultimo fagiolo.
Infine, si mettono a confronto più interpretazioni di probabilità: classica, frequentista e soggettiva.

Sezioni della scheda:

- Laboratorio
- Approfondimento
- Mani in pasta

Il materiale della scheda
è online

Laboratorio

Occorrente

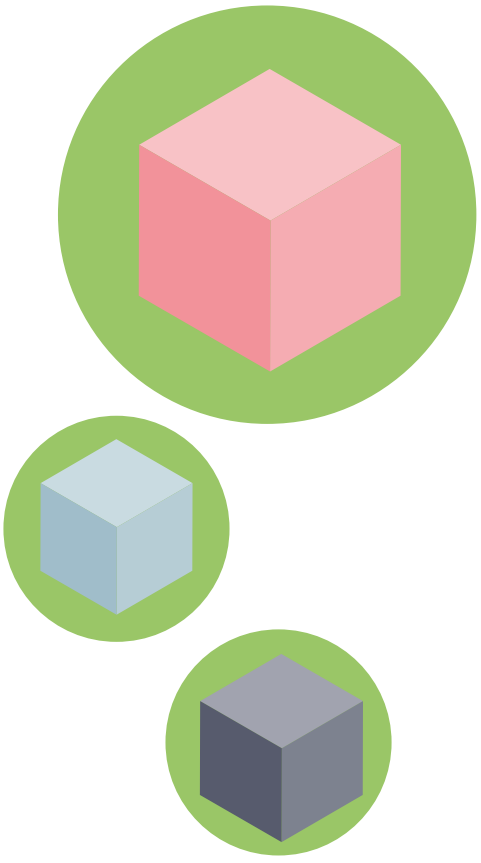
= 2 dadi da gioco e 12 fagioli

= scheda Probabilità a fagiolo

= quaderno degli esperimenti

Contenuti digitali

= foglio elettronico Probabilità a fagiolo



Svolgimento

Il laboratorio è suddiviso in due momenti. Una prima parte è dedicata al lancio dei dadi e all'osservazione dei risultati (scheda Probabilità a fagiolo); una seconda parte propone in modo intuitivo e pratico il concetto di probabilità, secondo le interpretazioni classica e frequentista (quaderno degli esperimenti e foglio di calcolo).

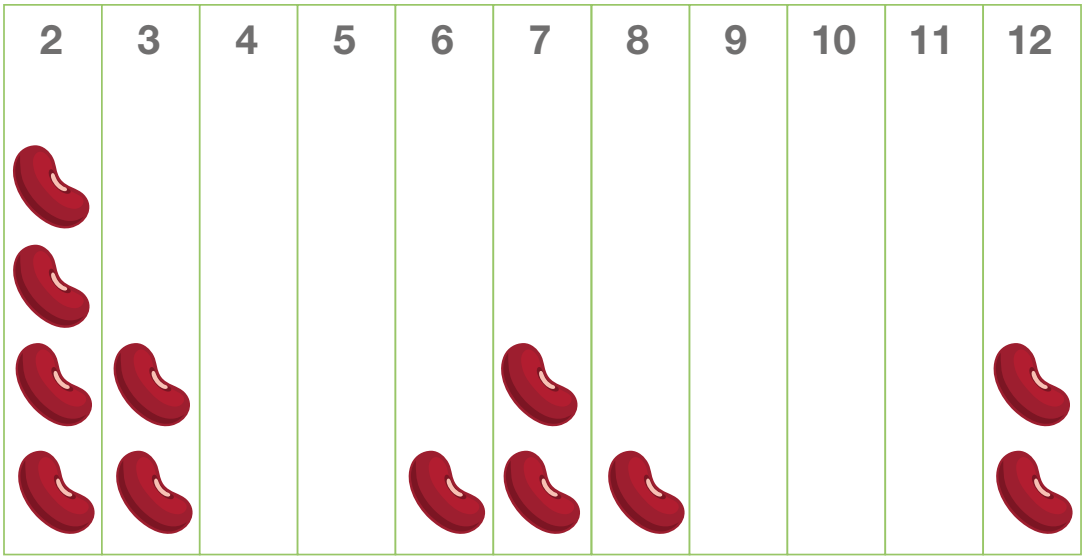
Prima parte: sfida all'ultimo fagiolo

Per avviare l'attività, l'insegnante distribuisce a ogni studente due dadi, la scheda Probabilità a fagiolo e 12 fagioli da disporre a piacimento su di essa.

Lo scopo del gioco è eliminare tutti i fagioli dalla scheda con il minor numero di lanci possibile.

A ogni lancio, un fagiolo può esser tolto, se la somma delle facce dei dadi corrisponde al valore indicato nella colonna dove è posizionato.

somma delle facce dei dadi



In questa fase iniziale si può ragionare se esiste una strategia migliore di altre per distribuire i fagioli.

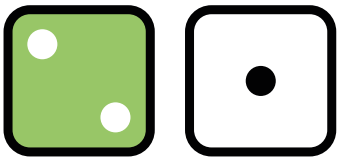
Partendo dalla considerazione che le facce di un dado assumono sei modalità (1, 2, 3, 4, 5, 6), si determinano i valori ammissibili per la loro somma. Poi si formulano alcune ipotesi su quali siano le modalità più probabili.

I valori ammissibili si verificano tutti con la stessa frequenza (equiprobabilità)? Per quale motivo 1 e 13 non sono osservabili?

Dopo aver posizionato i fagioli, ogni studente procede nell'attività in modo autonomo. Lancia la prima coppia di dadi e registra il punteggio osservato nella tabella dedicata.
Se un fagiolo si trova in corrispondenza della somma ottenuta, lo toglie dallo schema.

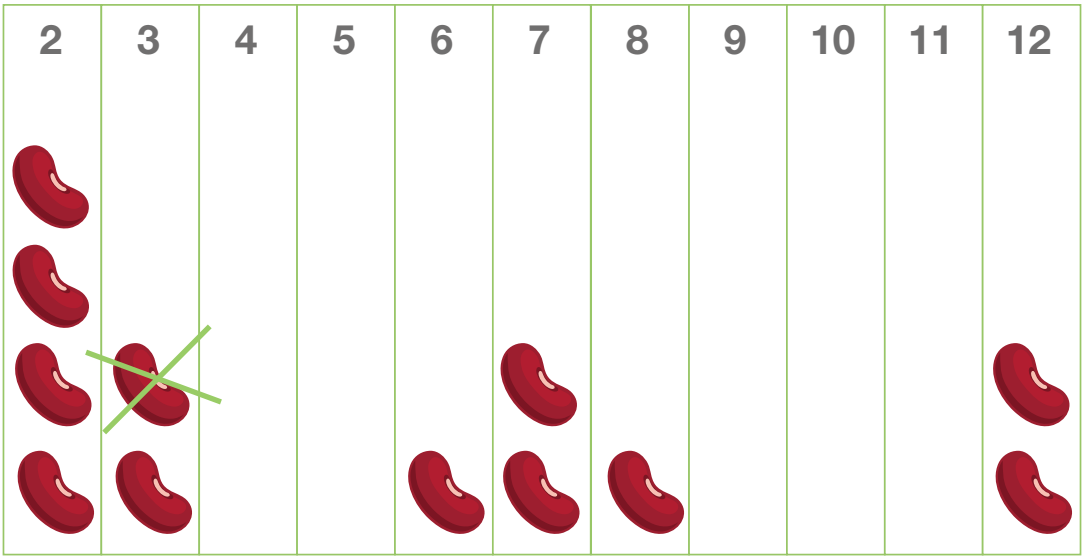
Laboratorio

Se la somma delle facce è 3, si toglie un fagiolo dalla colonna corrispondente.
Se, invece, il punteggio osservato è 5, non si elimina alcun fagiolo. Si può rimuovere un solo fagiolo per volta.



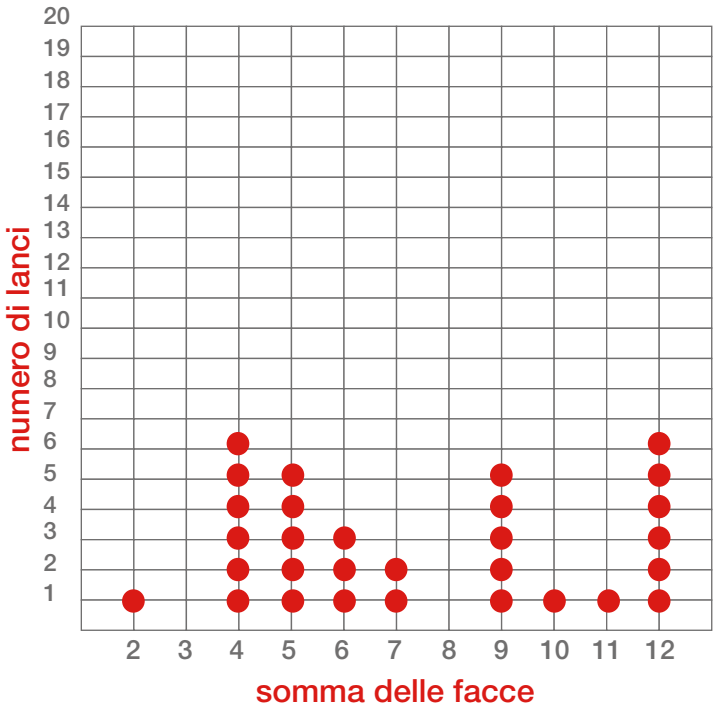
NUMERO DEL LANCIO	SOMMA DELLE FACCE
1	3

somma delle facce dei dadi



Si procede con i lanci successivi, fino a un massimo di 30. Vince il giocatore che per primo resta senza fagioli.
Al termine dei lanci, ogni studente rappresenta i propri risultati con un **dot-plot**, ovvero un grafico simile al diagramma a barre, dove ogni somma corrisponde a un punto (dot) sulla griglia. L'asse orizzontale riporta i possibili valori della somma delle facce (da 2 a 12), mentre l'asse verticale corrisponde alla frequenza assoluta osservata (numero di volte in cui si è verificata una determinata somma).
I dati possono essere sintetizzati anche mediante una tabella di frequenza semplice.

Dot-plot e tabella di frequenza della somma delle facce



SOMMA DELLE FACCE	NUMERO DI LANCI (frequenza assoluta)
2	1
3	0
4	6
5	5
6	3
7	2
8	0
9	5
10	1
11	1
12	6
TOTALE LANCI	30

Si confrontano i risultati di ciascuno e si cerca di dare risposta alla domanda iniziale sulla strategia migliore per distribuire i fagioli.

30 lanci sono sufficienti per dare una risposta?

Se si uniscono i lanci di tutti gli studenti cosa si osserva?

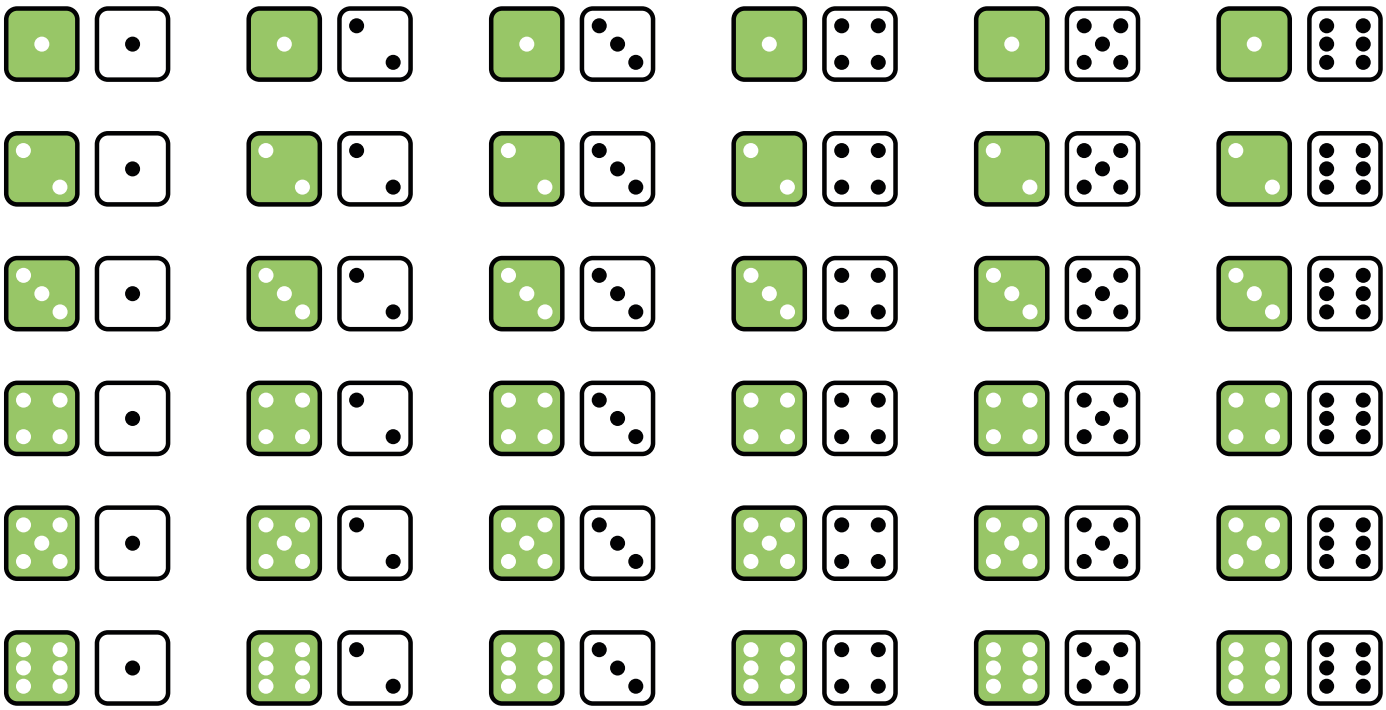
Questi e altri quesiti introducono gli studenti ai concetti di probabilità classica e frequentista e preparano alla seconda parte dell'attività.

Laboratorio

Seconda parte: anche il caso ha le sue regole

Il laboratorio procede sul quaderno degli esperimenti.
Ogni studente, per comprendere come determinare lo spazio campionario, completa la Tabella delle combinazioni con la somma delle facce dei due dadi.

Combinazioni possibili delle facce di due dadi

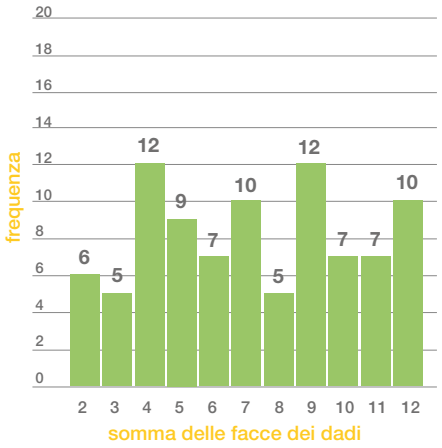


Poi rappresenta le frequenze assolute nel Diagramma a barre e costruisce la distribuzione di probabilità della somma delle facce di due dadi nella Tabella delle probabilità.

Completati la scheda Probabilità a fagiolo e il quaderno degli esperimenti, l'insegnante propone alla classe di esaminare come cambiano le frequenze osservate all'aumentare del numero dei lanci. Per farlo, si sintetizzano i risultati di tutti con la tabella e il diagramma a barre, predisposti nel file Probabilità a fagiolo, disponibile online.

Sintesi dei risultati

chi	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	totale lanci
Susanna	1	0	6	5	3	2	0	5	1	1	6	30
Susi	2	3	5	1	0	5	2	6	5	1	0	30
Katia	3	2	1	3	4	3	3	1	1	5	4	30
												0
												0
												0
fre-quenza	6	5	12	9	7	10	5	12	7	7	10	90



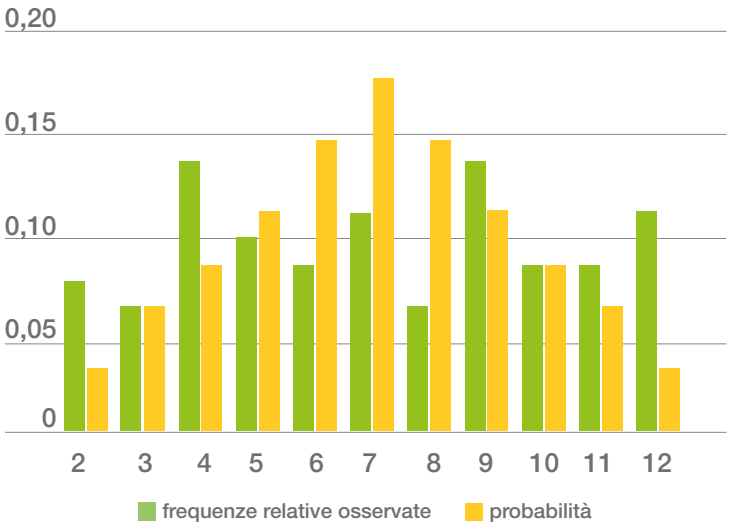
Si avvia la discussione in classe, proponendo alcuni semplici quesiti.

Come si possono confrontare i risultati complessivi con quelli di ciascuno? Il calcolo delle frequenze relative e percentuali è utile?

Il calcolo delle frequenze relative rispetto al totale dei lanci effettuati (90), consente di individuare eventuali regolarità negli esiti dell'esperimento e di introdurre il concetto di probabilità secondo l'interpretazione frequentista (vedi sezione Approfondimento).

Frequenze osservate in classe e probabilità

somma delle facce	frequenze assolute osservate	frequenze relative osservate	probabilità
2	6	0,07	0,03
3	5	0,06	0,06
4	12	0,13	0,08
5	9	0,10	0,11
6	7	0,08	0,14
7	10	0,11	0,17
8	5	0,06	0,14
9	12	0,13	0,11
10	7	0,08	0,08
11	7	0,08	0,06
12	10	0,11	0,03
totale	90	1	1

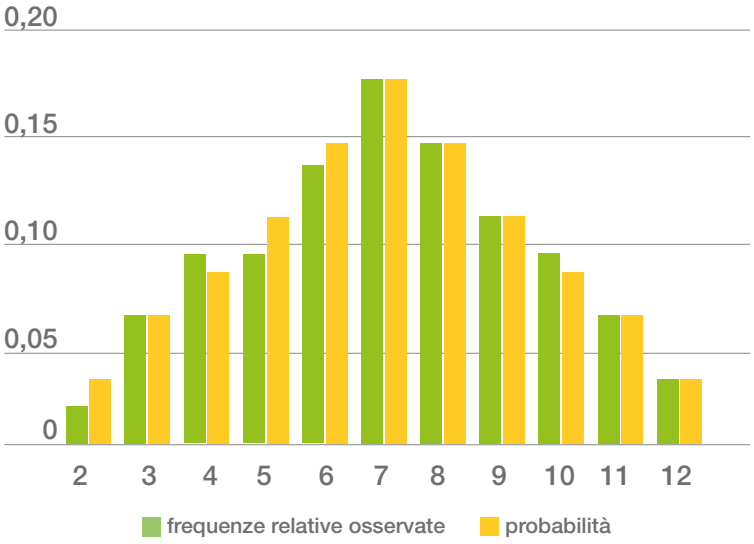


Approfondimento

Per approfondire ulteriormente l'argomento, si simula il lancio di una coppia di dadi per 1.000 volte, utilizzando le funzionalità del foglio di calcolo predisposto. In seguito, si confrontano i risultati con le probabilità.

Frequenze osservate e probabilità: prove simulate

somma delle facce	frequenze assolute osservate	frequenze relative osservate	probabilità
2	23	0,02	0,03
3	55	0,06	0,06
4	92	0,09	0,08
5	90	0,09	0,11
6	132	0,13	0,14
7	169	0,17	0,17
8	143	0,14	0,14
9	114	0,11	0,11
10	94	0,09	0,08
11	61	0,06	0,06
12	27	0,03	0,03
totale	1.000	1	1



Nella vita quotidiana spesso si prendono decisioni in condizioni di incertezza, utilizzando la teoria delle probabilità in modo inconsapevole.

Prima di uscire è meglio prendere l'ombrello? La mia squadra del cuore vincerà la partita?

La probabilità è associata a qualsiasi situazione in cui è necessario fare previsioni o prendere decisioni. Per questo essa svolge un ruolo cruciale in tutte le scienze (fisica, ingegneria, meteorologia, statistica, ecc.).

Se si conduce un **esperimento casuale**, come il lancio di due dadi, gli esiti del lancio non sono prevedibili, mentre sono noti tutti i possibili risultati o **eventi elementari**.
L'insieme di tutti i possibili esiti dell'esperimento è chiamato spazio degli eventi elementari o **spazio campionario**. In questo caso lo spazio campionario è il seguente:

Somma delle facce di due dadi = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}.

Oltre agli eventi elementari, esistono gli eventi composti, che derivano dal verificarsi di due o più eventi elementari.

Un esempio di evento composto è la somma delle facce di due dadi minore di 4. Gli eventi elementari sono: somma delle facce pari a 2 o somma delle facce pari a 3.

Quindi, per **evento** si intende qualsiasi fatto o avvenimento che può essere osservato.
Per quantificare l'incertezza di un evento, si utilizza il calcolo delle probabilità. Convenzionalmente, la probabilità è misurata su una scala da 0 a 1. Il valore zero corrisponde a un **evento impossibile**, come ad esempio che la somma delle facce dei dadi sia pari a 1. Il valore uno è associato all'**evento certo**, ovvero che la loro somma sia compresa tra 2 e 12, estremi inclusi.

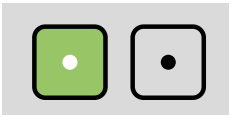
Come si calcola la probabilità di un evento?

Interpretazione classica

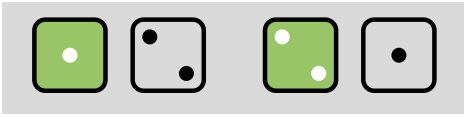
Secondo l'interpretazione classica, la probabilità del verificarsi di un evento A è determinata dal seguente rapporto:

$$P(A) = \frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}}$$

Poiché ciascun dado ha 6 facce, i casi possibili per la somma delle facce di due dadi sono 36 (6x6). I casi favorevoli dipendono dall'evento di interesse. La somma pari a 2 si ottiene in un modo solo. La somma pari a 3, invece, si presenta con due combinazioni e così via.



Probabilità (somma delle facce pari a 2) = $\frac{1}{36}$



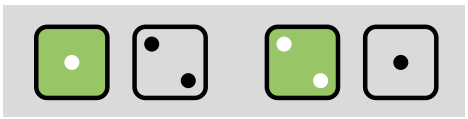
Probabilità (somma delle facce pari a 3) = $\frac{2}{36}$

Nel lancio di due dadi, la probabilità della somma delle facce può essere calcolata anche a partire dal prodotto delle probabilità delle singole facce. Infatti l'esito del primo dado non influisce in alcun modo sull'esito del secondo. I due **eventi** sono fra loro **indipendenti**.
Se gli eventi B (faccia del primo dado) e C (faccia del secondo dado) sono indipendenti, la probabilità che si verifichino entrambi è data dal prodotto delle probabilità di ciascun evento:

$$P(BC) = P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$$

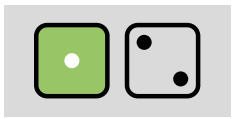
Approfondimento

La probabilità della somma delle facce deriva sia dall'indipendenza degli esiti dei lanci, che dai possibili modi in cui può essere ottenuta.

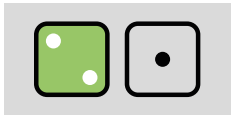


L'evento somma delle facce pari a 3 si osserva in due modi: coppia {1,2} oppure coppia {2,1}. I due **eventi** sono **incompatibili** (o disgiunti), perché non possono verificarsi simultaneamente. L'uno esclude l'altro. La probabilità dell'evento è data da:

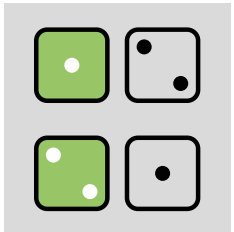
$$P(\text{somma delle facce pari a 3}) = P(\{1,2\} \cup \{2,1\}) = P(\{1,2\})+P(\{2,1\})$$



$$P(\{1,2\}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$$ *(indipendenza)*



$$P(\{2,1\}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$$ *(indipendenza)*



Probabilità (somma delle facce pari a 3)

$$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$$ *(indipendenza e incompatibilità)*

Interpretazione frequentista

A questo punto, si può fare un ulteriore passo in avanti e provare a rispondere alla domanda:

Se le facce dei due dadi non fossero equiprobabili, come si potrebbe determinare la probabilità della somma?

Nell'Ottocento un gruppo di studiosi osservò che spesso non si è in grado né di individuare i casi possibili né di valutare l'equiprobabilità degli eventi.
Da ciò derivarono gli studi che nel 1928 portarono il matematico e filosofo Richard Von Mises a formulare l'**interpretazione frequentista** della probabilità, **secondo la quale la probabilità di un evento corrisponde alla frequenza relativa osservata** (il numero di volte in cui si è verificato l'evento sul totale delle prove effettuate) **in un gran numero di prove condotte nelle medesime condizioni**.
L'interpretazione frequentista dà un significato pratico e molto intuitivo alla probabilità.
Al crescere del numero delle prove, condotte tutte nelle stesse condizioni, **la frequenza relativa tende al valore della probabilità dell'evento**.
Pertanto, la probabilità frequentista è determinata a posteriori, sulla base dell'esame dei dati osservati.

Interpretazione soggettiva

L'interpretazione classica e quella frequentista non sono sempre applicabili.
Esistono situazioni in cui non è possibile conoscere a priori la probabilità o effettuare una serie numerosa di osservazioni.

L'interpretazione soggettiva introduce un concetto più ampio di probabilità che si basa sull'esperienza, sulle informazioni a disposizione o sull'intuizione.

Nel laboratorio, all'inizio del gioco, la scelta di ogni studente di come collocare i fagioli sulla scheda è un esempio di probabilità soggettiva.

La probabilità soggettiva traduce numericamente il grado di fiducia di una persona nel verificarsi di un evento incerto.

Alla fine del laboratorio si può chiedere ai ragazzi di confermare o meno la scelta iniziale. L'acquisizione di nuove conoscenze consente loro di formulare una nuova valutazione della probabilità di un evento.

Mani in pasta

PROBABILITÀ A FAGIOLO

somma delle facce dei dadi

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

= Prendi 12 fagioli e mettili in colonna sotto ai numeri. Puoi metterli tutti sotto allo stesso numero o distribuirli. Nelle caselle verdi riporta il totale dei fagioli per colonna.

= Lancia una coppia di dadi. Fai la somma dei risultati e registrala nella tabella.

= Se hai un fagiolo nella colonna corrispondente alla somma ottenuta, toglilo.

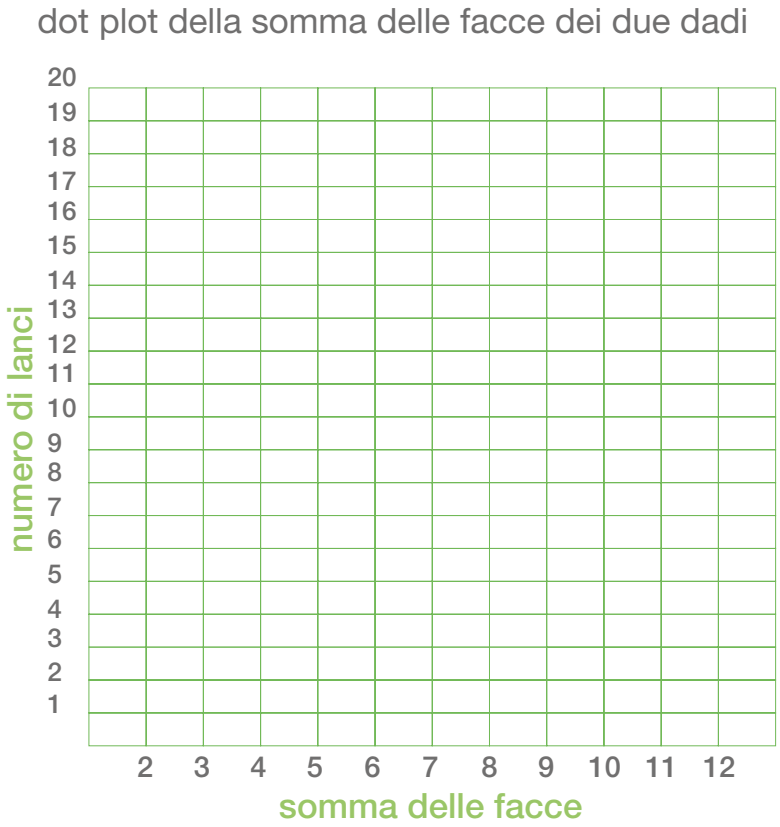
numero del lancio	somma delle facce
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

numero del lancio	somma delle facce
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	

numero del lancio	somma delle facce
21	
22	
23	
24	
25	
26	
27	
28	
29	
30	

Chi riesce per primo a eliminare tutti i fagioli dalla scheda vince. Quando si toglie l'ultimo fagiolo per avvertire che la partita è finita, bisogna gridare *bean!*
Nel caso in cui nessuno riesca a eliminare tutti i fagioli, dopo 30 lanci, vince chi rimane con meno fagioli sulla scheda.

Segna con un puntino ogni somma delle due facce dei dadi ottenuta nei tuoi lanci.



Completa la tabella di frequenza.

somma delle facce	numero dei lanci (frequenza assoluta)
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
totale lanci	

IL QUADERNO DEGLI ESPERIMENTI DI

Cosa voglio capire:

Cosa ho fatto:

Cosa voglio misurare:

Completa la tabella con le somme delle facce dei dadi e rappresenta le frequenze nel diagramma barre.

tabella delle combinazioni

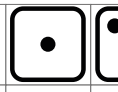
						
	2					
		7				
						12

diagramma a barre

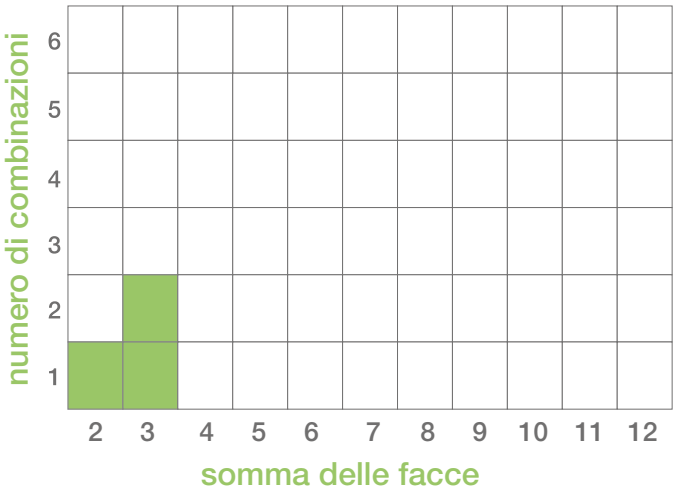


tabella delle probabilità

somma delle facce di due dadi	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	totale
numero di combinazioni												36
probabilità												1

1. Qual è il risultato più probabile?
2. Durante il gioco, quali sono stati i 3 risultati apparsi più spesso?
3. Per vincere, come si dovrebbero organizzare i fagioli nella scheda del gioco?

1. Immagina di lanciare 3 dadi.

Quante sono le combinazioni possili delle facce di tre dadi? _____

2. Completa con le combinazioni possibili:

Sul primo dado esce la faccia 1

facce dei dadi

I dado	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
II dado	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3
III dado	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
somma delle facce	3	4	5	6	7	8	4	5	6	7	8	9	5	6	7	8	9	10

facce dei dadi

I dado	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
II dado	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5						
III dado	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6						
somma delle facce	6	7	8	9	10	11	7	8	9	10	11	12						

Se sul primo dado esce la faccia 2, come cambia la somma? _____

3. Trova le combinazioni.

In quanti modi si può ottenere una somma pari a 3? _____

In quanti modi si può ottenere una somma pari a 6? _____

facce dei dadi

I dado																		
II dado																		
III dado																		

Scuola secondaria
di primo grado

Età: 11-14 anni
Durata: 2 ore

Contenuti: distribuzione di frequenza, densità di frequenza, istogramma, equivalenze tra unità di misura

Attività: confronto di insiemi di dati nello spazio e nel tempo

La demografia in cannuccia

Quanti siamo, come siamo e perché ci contiamo?

La lenta e progressiva evoluzione demografica di un paese può essere studiata attraverso la piramide per età e sesso della popolazione.
Questa rappresentazione grafica descrive come gli eventi storici e sociali influenzino sia la dinamica che la struttura di una popolazione.
Utilizzando delle semplici cannucce ed elaborando i dati della statistica ufficiale, i ragazzi costruiscono la piramide delle età e ne interpretano il significato.

Sezioni della scheda:

- Laboratorio
- Approfondimento
- Mani in pasta

Il materiale della scheda è online

Laboratorio

Occorrente

- cartoncino bianco 70x100 cm
- cannucce di carta colorate preferibilmente di diametro pari a 0,5 cm
- forbici e righello
- tabella A - Popolazione residente in Italia al 1° gennaio 2021 per età e sesso (composizione percentuale)
- tabella B - Popolazione residente in Italia al 1° gennaio 2021 per età e sesso (composizione percentuale per sesso)

Contenuti digitali

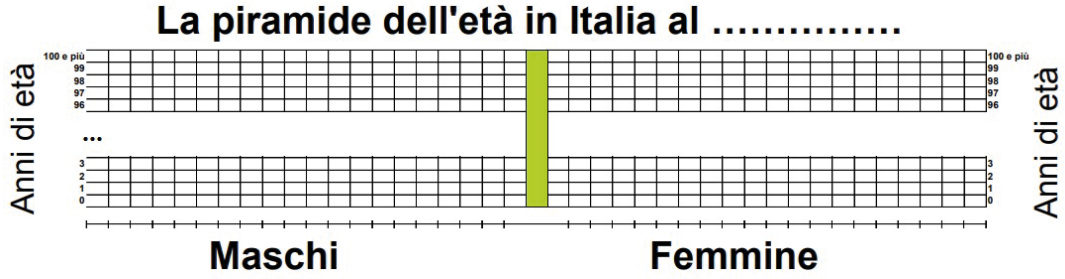
- foglio elettronico Demografia in cannuccia

Svolgimento

Per avviare il laboratorio, è necessario disporre del pannello dove applicare le cannucce. Questo può essere stampato in formato A1 verticale (84,1 cm x 59,4 cm), secondo il modello predisposto nel file Demografia in cannuccia, disponibile online.

In alternativa, il pannello può essere realizzato in classe con un cartellone. Nella parte superiore del foglio, di circa 10 cm, si inserisce il titolo del grafico (per esempio, La piramide delle età in Italia al 1° gennaio 2021), mentre sotto si disegna un rettangolo di circa 50,5 cm di altezza e 41 cm di base.

La superficie del rettangolo va suddivisa in 41 colonne larghe 1 cm e 101 righe alte 0,5 cm (pari al diametro della cannuccia). In questo modo si ottiene la griglia che servirà come guida per incollare le cannucce.



Per convenzione, sul pannello si rappresentano a sinistra i maschi e a destra le femmine. Ogni riga corrisponde a un singolo anno d'età e va numerata con 0, 1, 2, … 99, 100 e più, procedendo dal basso verso l'alto. Per facilitare la costruzione della piramide, la numerazione è riportata sia a destra che a sinistra. L'area del grafico dedicata ai maschi è separata da quella delle femmine con una colonna centrale da colorare a piacimento.

Preparato il pannello, gli studenti utilizzano le percentuali della tabella A per misurare e tagliare le cannucce e le incollano nelle righe corrispondenti fino a completare la rappresentazione.

La convenzione scelta per trasformare la frequenza percentuale in centimetri è 1 cm = 0,1%.

Di seguito, si propone un esempio. Al 1° gennaio 2021 gli uomini di 55 anni d'età sono 477.592. La popolazione totale è composta da 59.236.213 persone. Ne deriva che gli uomini di 55 anni sono lo 0,8% della popolazione totale.
Questo valore corrisponde a una porzione di cannuccia lunga 8 cm che va incollata in corrispondenza dell'età 55, a partire dalla prima cella a sinistra della barra colorata.

La percentuale di uomini di età pari a 55 anni è calcolata nel seguente modo:

$$\frac{477.592}{59.236.213} \times 100 = 0,8\%$$

Laboratorio

Il laboratorio procede con la discussione in classe sulle caratteristiche della piramide.

Qual è la sua forma?

Per alcune età ci sono delle strozzature?

Si riescono a cogliere delle simmetrie o asimmetrie tra maschi e femmine?

Per approfondire questi aspetti è possibile avvalersi dei dati presenti nel file, Demografia in cannuccia:

- popolazione residente in Italia, per sesso e singolo anno d'età al 1° gennaio 2021,
- frequenze percentuali per singolo anno d'età e sesso,
- piramidi delle età derivate dalle frequenze percentuali.

Le informazioni sulla struttura demografica per età, contenute nel file, provengono dalla sezione Popolazione residente del sistema informativo Istat, **Demografia in cifre**.

Questa banca dati consente di scegliere il periodo e il territorio di interesse e di copiare i dati della tavola visualizzata online su un foglio di calcolo.
Nel file Demografia in cannuccia, se si modificano i dati presenti nel primo foglio, le tabelle e i grafici nei fogli successivi si aggiornano in modo automatico.

La piramide delle età: costruzione

La **piramide delle età** riproduce la struttura per età e sesso di una popolazione in un determinato momento.

È costituita da due istogrammi, ruotati e accostati, disposti simmetricamente rispetto all'asse verticale. Convenzionalmente, l'**istogramma** sulla sinistra si riferisce alla distribuzione per età della popolazione maschile, mentre quello a destra alla popolazione femminile.

La base di ogni rettangolo è pari all'ampiezza della classe d'età e la sua superficie è proporzionale alla popolazione della classe d'età per sesso.

Sull'asse verticale si indicano le età (o le classi d'età) in anni, mentre su quello orizzontale si possono rappresentare le **frequenze assolute**, **relative**, **percentuali** e le **densità di frequenza**, come riassunto nello schema seguente.

Le componenti della piramide

ASSE VERTICALE	ASSE ORIZZONTALE	AREA DELLA PIRAMIDE
Singolo anno d'età	Frequenze assolute	Popolazione totale
Singolo anno d'età	Frequenze relative o percentuali calcolate sul totale della popolazione	1 per le frequenze relative o 100% per le percentuali
Classi d'età	Densità di frequenza assolute	Popolazione totale
Classi d'età	Densità di frequenza relative o percentuali calcolate sul totale della popolazione	1 per le densità relative o 100% per le percentuali
Classi d'età di ampiezza uguale*	Frequenze assolute	Popolazione totale moltiplicata per l'ampiezza della classe
Classi d'età di ampiezza uguale*	Frequenze relative o percentuali calcolate sul totale della popolazione	1 o 100% moltiplicato per l'ampiezza della classe

*Se le classi di età hanno la medesima ampiezza, è possibile utilizzare le frequenze invece delle densità. Ciò non altera l'interpretazione della piramide.

Approfondimento

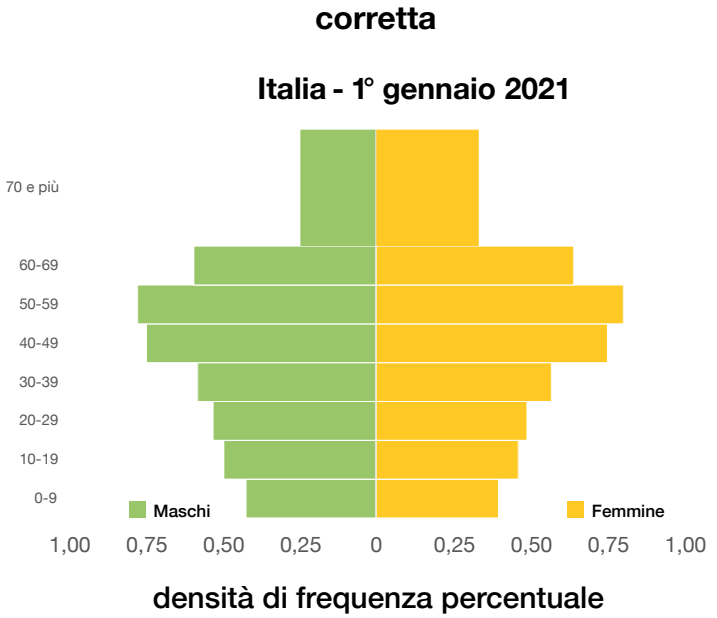
Solitamente la piramide delle età è costruita utilizzando classi di uguale ampiezza. Se, invece, la popolazione è raggruppata in modo non omogeneo, la confrontabilità tra le classi si ottiene ponendo sull'asse orizzontale le densità, che rendono l'area di ogni rettangolo proporzionale alla frequenza.

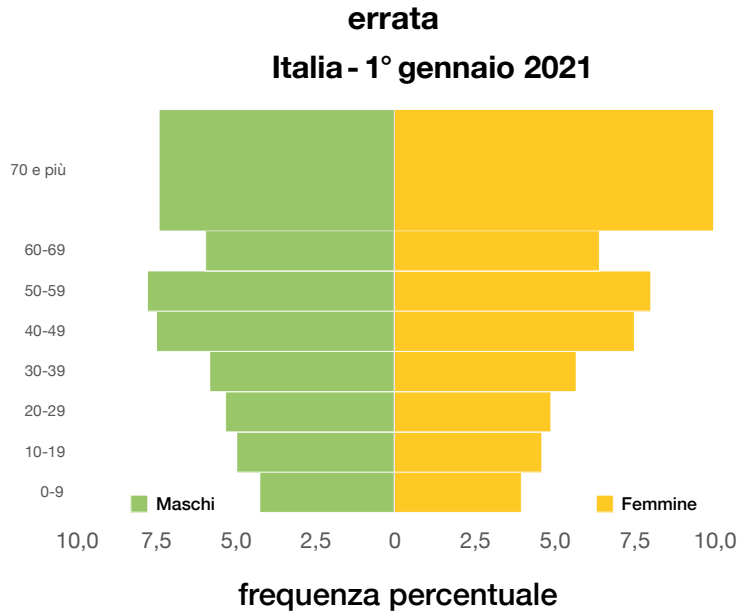
Si considerino i maschi della classe 0-9 anni, che comprendono tutti i bambini di età pari a 0, 1, 2, ... 9 anni compiuti. La densità di frequenza assoluta è calcolata come il rapporto fra la frequenza assoluta e l'ampiezza della classe:

$$d_{0\text{-}9} = \frac{\text{Totale maschi della classe}_{0\text{-}9}}{\text{Ampiezza della classe}_{0\text{-}9}} = \frac{2.464.906}{10} = 246.490{,}6$$

In modo equivalente si determinano la densità di frequenza relativa e percentuale.

Piramidi delle età. Densità di frequenza e frequenza percentuale





Fonte: Elaborazioni su dati Istat, *Demografia in cifre*, http://demo.istat.it/.

La densità di frequenza percentuale si calcola nel seguente modo:

$$\frac{\text{Frequenza percentuale}}{\text{Ampiezza della classe}} = \frac{\left(\frac{2.464.906}{59.263.213} \times 100\right)}{10} \approx 0{,}42$$

Il grafico di sinistra riporta sull'asse orizzontale la densità di frequenza percentuale, mentre quello di destra la frequenza percentuale. Per le classi di uguale ampiezza, l'interpretazione del dato non cambia. Tuttavia, per la classe 70 e più la frequenza fornisce una rappresentazione fuorviante della struttura demografica. L'area totale del grafico corretto è pari al 100%, mentre la superficie di quello errato non ha alcun significato.

La piramide delle età è pensata per descrivere la popolazione nel suo complesso. In alcuni casi può essere interessante costruirla con le frequenze percentuali per sesso (vedi tabella B allegata).

Ad esempio, se la percentuale di uomini di 55 anni, calcolata sul totale della popolazione è pari allo 0,8% (477.592 maschi su 59.236.213 persone), essa diventa l'1,7%, se si considerano solo i maschi (477.592 su 28.866.226 maschi). Di conseguenza, l'area totale del grafico sarà pari al 200% (100% maschi e 100% femmine).

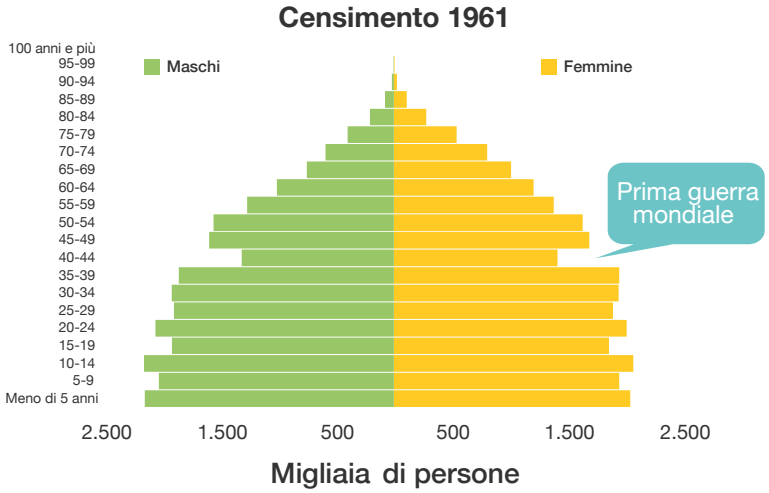
La piramide delle età: interpretazione

La piramide delle età è un'istantanea della popolazione alla data della rilevazione che evidenzia il risultato degli eventi demografici verificatisi nel passato e costituisce il punto di partenza per valutarne l'evoluzione futura. Analizzandola, si possono trarre indicazioni sulle caratteristiche della popolazione, sulla struttura per sesso e sui cambiamenti in atto.

La base, ad esempio, fornisce indicazioni circa il flusso delle nascite. Se è molto larga, indica che i nati sono in forte aumento; se si restringe, il flusso delle nascite è in diminuzione.

L'inclinazione dei lati, invece, descrive l'andamento dei decessi. Più la piramide è ripida, maggiore è la mortalità. Infine, la presenza di rigonfiamenti o strozzature per particolari classi d'età, è associata solitamente a fattori di perturbazione della natalità e della mortalità, come le guerre, e talvolta è il risultato delle migrazioni.

Piramide delle età della popolazione in Italia



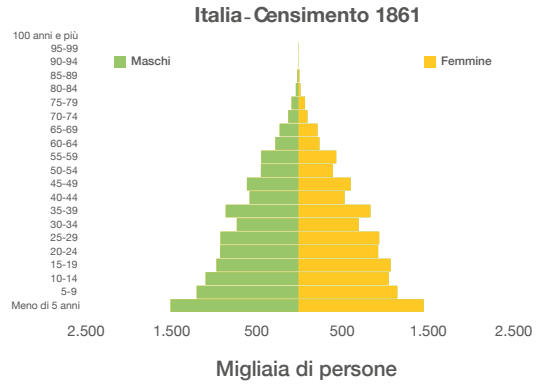
In Italia due eventi rilevanti, che hanno determinato importanti strozzature, sono stati la Prima e la Seconda Guerra Mondiale.

Fonte: Elaborazioni su dati Istat, *Serie storiche*, http://seriestoriche.istat.it/fileadmin/documenti/Tavola_2.2.1.xls.

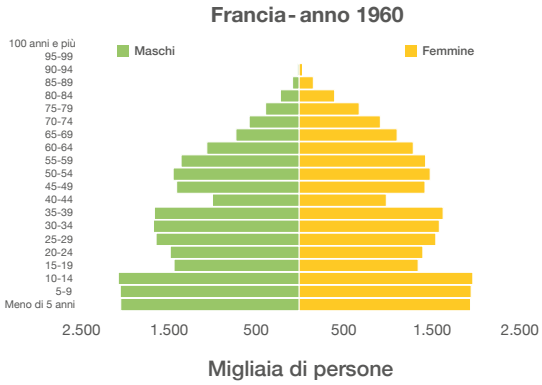
Approfondimento

Il profilo della piramide delle età può assumere molte forme. Di seguito, ne sono proposte alcune piuttosto frequenti.

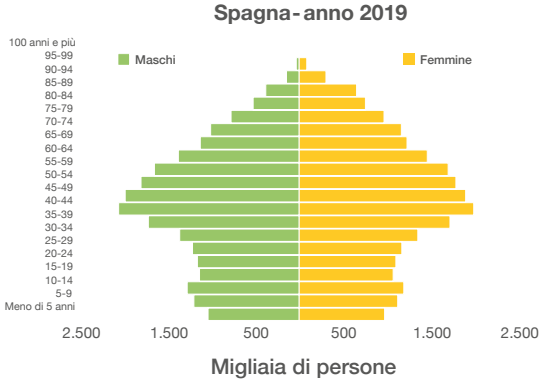
Piramidi delle età a confronto



Forma tipica di una popolazione con natalità e mortalità elevate. La base della piramide è ampia, quindi la percentuale di giovani è molto elevata. I lati sono ripidi per effetto dell'alta mortalità che colpisce tutte le classi d'età.



La forma mette in evidenza come in passato si sia verificata una forte riduzione delle nascite (strozzatura 15-24 anni), a cui è seguita, in anni più recenti, una ripresa.



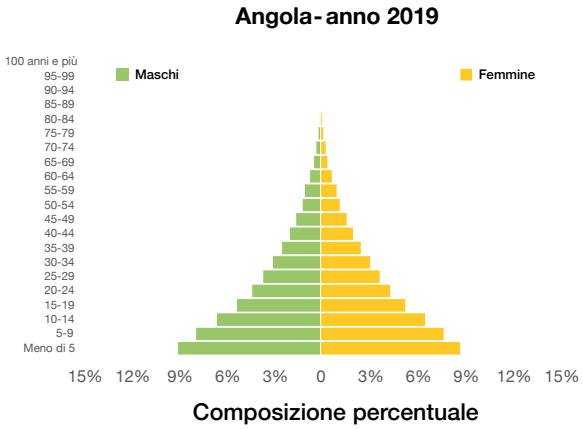
Profilo tipico dell'invecchiamento demografico: diminuiscono sia la natalità che la mortalità.

Fonte: Elaborazioni su dati Istat, *Serie storiche*, http://seriestoriche.istat.it/fileadmin/documenti/Tavola_2.2.1.xls e PopulationPyramid, https://populationpyramid.net.

Questa rappresentazione grafica consente di comparare anche l'evoluzione demografica di differenti paesi. A questo proposito, sono consultabili online le stime e le proiezioni ufficiali della popolazione mondiale, messe a disposizione dalle Nazioni Unite nella sezione ***Population Division - World population prospects*** e le **piramidi delle età** per ogni paese del mondo.

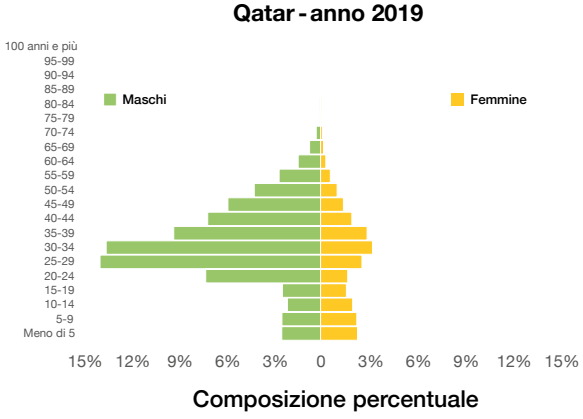
Un altro sito interessante è **Population Pyramids of the World from 1950 to 2100** , dove è possibile visualizzare le piramidi dell'età e le proiezioni demografiche di tutti i paesi del mondo.

Piramide delle età a confronto



Natalità e mortalità sono elevate.

Fonte: PopulationPyramid.net, *Population Pyramids of the World from 1950 to 2100*, https://populationpyramid.net/angola/2019/.



Prevalenza di maschi soprattutto tra i 25-34 anni, probabilmente per effetto dell'immigrazione per motivi di lavoro.

Fonte: PopulationPyramid.net, *Population Pyramids of the World from 1950 to 2100*, https://populationpyramid.net/qatar/2019/.

Tabella A
Popolazione residente in Italia al 1° Gennaio 2021 per età e per sesso

(composizione percentuale)

ETÀ	MASCHI	FEMMINE	ETÀ	MASCHI	FEMMINE
0	0,4	0,3	51	0,8	0,8
1	0,4	0,3	52	0,8	0,8
2	0,4	0,4	53	0,8	0,8
3	0,4	0,4	54	0,8	0,8
4	0,4	0,4	55	0,8	0,8
5	0,4	0,4	56	0,8	0,8
6	0,4	0,4	57	0,8	0,8
7	0,4	0,4	58	0,7	0,8
8	0,5	0,4	59	0,7	0,8
9	0,5	0,4	60	0,7	0,7
10	0,5	0,5	61	0,7	0,7
11	0,5	0,5	62	0,6	0,7
12	0,5	0,5	63	0,6	0,7
13	0,5	0,5	64	0,6	0,7
14	0,5	0,5	65	0,6	0,6
15	0,5	0,5	66	0,6	0,6
16	0,5	0,5	67	0,5	0,6
17	0,5	0,5	68	0,5	0,6
18	0,5	0,5	69	0,5	0,6
19	0,5	0,5	70	0,5	0,6
20	0,5	0,5	71	0,5	0,6
21	0,5	0,5	72	0,6	0,6
22	0,5	0,5	73	0,5	0,6
23	0,5	0,5	74	0,5	0,6
24	0,5	0,5	75	0,4	0,5
25	0,5	0,5	76	0,4	0,5
26	0,5	0,5	77	0,4	0,5
27	0,5	0,5	78	0,4	0,5
28	0,5	0,5	79	0,4	0,5
29	0,5	0,5	80	0,4	0,5
30	0,6	0,5	81	0,4	0,5
31	0,5	0,5	82	0,3	0,5
32	0,6	0,5	83	0,3	0,4
33	0,5	0,5	84	0,2	0,4
34	0,6	0,5	85	0,2	0,4
35	0,6	0,6	86	0,2	0,3
36	0,6	0,6	87	0,2	0,3
37	0,6	0,6	88	0,1	0,3
38	0,6	0,6	89	0,1	0,2
39	0,6	0,6	90	0,1	0,2
40	0,6	0,6	91	0,1	0,2
41	0,6	0,6	92	0,1	0,1
42	0,7	0,7	93	0,0	0,1
43	0,7	0,7	94	0,0	0,1
44	0,7	0,7	95	0,0	0,1
45	0,8	0,8	96	0,0	0,1
46	0,8	0,8	97	0,0	0,0
47	0,8	0,8	98	0,0	0,0
48	0,8	0,8	99	0,0	0,0
49	0,8	0,8	100 e più	0,0	0,0
50	0,8	0,8			

Tabella B
Popolazione residente in Italia al 1° gennaio 2021 per età e per sesso

(composizione percentuale per sesso)

ETÀ	MASCHI	FEMMINE	ETÀ	MASCHI	FEMMINE
0	0,7	0,6	51	1,7	1,6
1	0,8	0,7	52	1,6	1,6
2	0,8	0,7	53	1,6	1,6
3	0,8	0,7	54	1,7	1,6
4	0,9	0,8	55	1,7	1,6
5	0,9	0,8	56	1,7	1,6
6	0,9	0,8	57	1,6	1,5
7	0,9	0,8	58	1,5	1,5
8	0,9	0,9	59	1,5	1,5
9	1,0	0,9	60	1,4	1,4
10	1,0	0,9	61	1,4	1,4
11	1,0	0,9	62	1,3	1,3
12	1,0	0,9	63	1,3	1,3
13	1,0	0,9	64	1,2	1,3
14	1,0	0,9	65	1,2	1,3
15	1,0	0,9	66	1,2	1,2
16	1,0	0,9	67	1,1	1,2
17	1,0	0,9	68	1,1	1,2
18	1,0	0,9	69	1,1	1,2
19	1,0	0,9	70	1,1	1,2
20	1,1	0,9	71	1,1	1,2
21	1,1	0,9	72	1,1	1,2
22	1,1	0,9	73	1,1	1,2
23	1,1	0,9	74	1,1	1,2
24	1,1	0,9	75	0,8	0,9
25	1,1	0,9	76	0,8	0,9
26	1,1	0,9	77	0,8	0,9
27	1,1	1,0	78	0,8	0,9
28	1,1	1,0	79	0,7	0,9
29	1,1	1,0	80	0,8	1,0
30	1,1	1,0	81	0,7	0,9
31	1,1	1,0	82	0,7	0,9
32	1,1	1,1	83	0,6	0,8
33	1,1	1,0	84	0,5	0,7
34	1,1	1,1	85	0,5	0,7
35	1,2	1,1	86	0,4	0,6
36	1,2	1,1	87	0,4	0,6
37	1,2	1,1	88	0,3	0,5
38	1,2	1,2	89	0,3	0,5
39	1,3	1,2	90	0,2	0,4
40	1,3	1,2	91	0,2	0,3
41	1,3	1,3	92	0,1	0,3
42	1,4	1,3	93	0,1	0,2
43	1,4	1,4	94	0,1	0,2
44	1,5	1,4	95	0,0	0,1
45	1,6	1,5	96	0,0	0,1
46	1,6	1,6	97	0,0	0,1
47	1,6	1,6	98	0,0	0,1
48	1,6	1,6	99	0,0	0,0
49	1,6	1,6	100 e più	0,0	0,0
50	1,6	1,6			

Scuola secondaria
di primo grado

Età: 11-14 anni
Durata: 1 ora e 30 minuti

Contenuti: evento, incertezza, probabilità

Attività: decisioni in condizioni di incertezza e misure di probabilità degli eventi, rappresentazione di insiemi di dati

La passeggiata dell'ubriaco

Dove andrà l'ubriaco?

I primi interrogativi sulla probabilità nascono da esperienze comuni.
Giochi semplici, come testa o croce, stimolano il pensiero critico e le valutazioni in condizioni di incertezza.
Lanciando una moneta, nessuno può affermare con sicurezza se uscirà testa o croce.
Si può provare a indovinare il risultato, ma è più corretto stimarne la probabilità.
Nel diciassettesimo secolo, quando nacque la teoria delle probabilità, numerosi studiosi e matematici si posero domande analoghe e tentarono di risolverle formulando le prime teorie sulle leggi del caso.
Attraverso la sperimentazione, il laboratorio permette agli studenti di giocare con l'incertezza, individuando le differenti tipologie di eventi e misurando la loro probabilità di verificarsi.

Sezioni della scheda:

- Laboratorio
- Approfondimento
- Mani in pasta

Il materiale della scheda
è online

Laboratorio

Occorrente

= una moneta

= il quaderno degli esperimenti

Contenuti digitali

= foglio elettronico Passeggiata aleatoria

Svolgimento

Il laboratorio è strutturato in due parti. Nella prima si lancia la moneta 10 volte e si osserva la variabilità dei dati. Nella seconda si simulano 1.000 prove e si ragiona sui risultati ottenuti.

Prima parte – Esperimento e analisi dei risultati

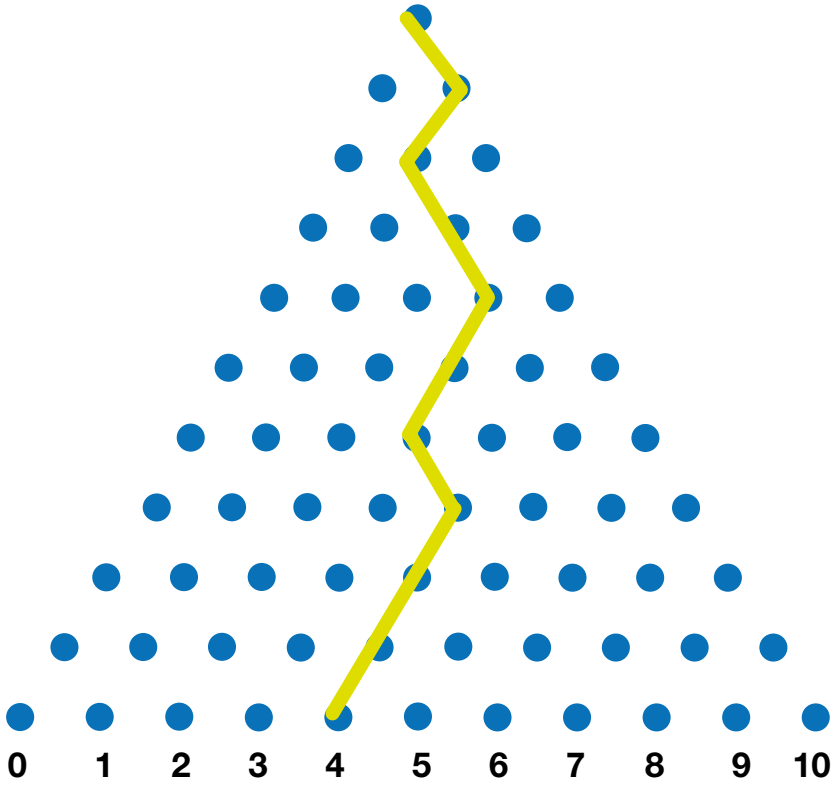
L'insegnante consegna a ogni alunno una moneta e un quaderno degli esperimenti. In seguito, illustra come registrare i risultati dei lanci in tabella e sulla mappa triangolare.

Partendo dal vertice del triangolo, si arriva alla base, tracciando un percorso.

A ogni bivio si lancia la moneta. Se esce testa, si procede a destra, se esce croce a sinistra. Si verifica facilmente che il punto di arrivo, indicato alla base del triangolo, corrisponde al numero di teste ottenute.

Esempio di percorso

	T	C
1 Lancio	X	
2 Lancio		X
3 Lancio	X	
4 Lancio	X	
5 Lancio		X
6 Lancio		X
7 Lancio	X	
8 Lancio		X
9 Lancio		X
10 Lancio		X
TOTALE	4	6



Nella figura il punto di arrivo è il 4. Nei 10 lanci si sono presentate quattro teste (T) e sei croci (C).

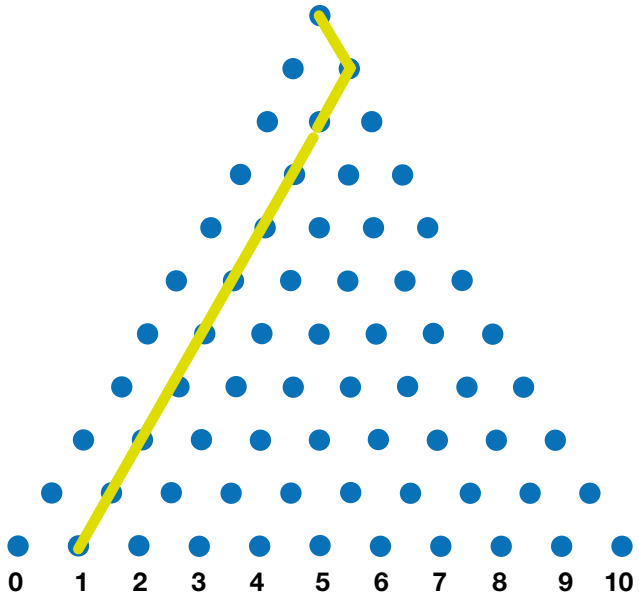
Per raggiungere gli arrivi da 1 a 9, i percorsi possibili sono più di uno. Mentre allo 0 e al 10 si arriva con un solo tragitto, rispettivamente, nessuna testa e 10 teste.

Laboratorio

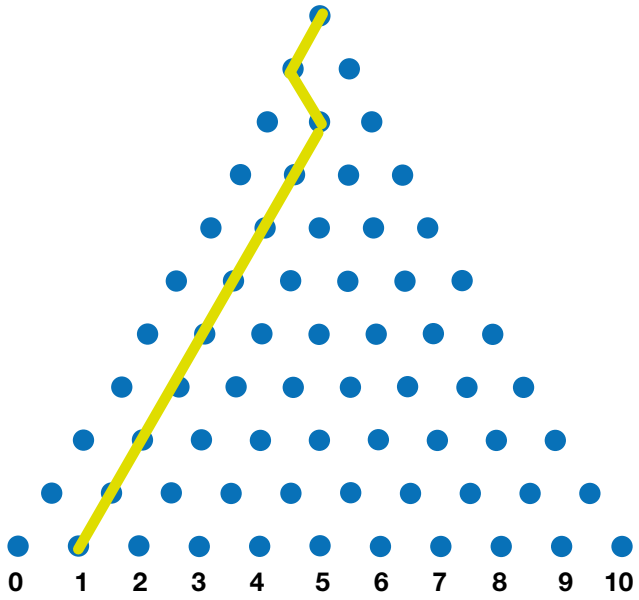
Per arrivare all'1, ad esempio, è necessario aver ottenuto una testa e nove croci.

Esempi di percorsi con una testa

	T	C
1 Lancio	X	
2 Lancio		X
3 Lancio		X
4 Lancio		X
5 Lancio		X
6 Lancio		X
7 Lancio		X
8 Lancio		X
9 Lancio		X
10 Lancio		X
TOTALE	1	9



	T	C
1 Lancio		X
2 Lancio	X	
3 Lancio		X
4 Lancio		X
5 Lancio		X
6 Lancio		X
7 Lancio		X
8 Lancio		X
9 Lancio		X
10 Lancio		X
TOTALE	1	9



Quanti sono i percorsi con una testa?

I modi in cui si possono combinare una testa e nove croci (percorsi favorevoli) sono dieci in tutto.

Percorso n. 1	Percorso n. 2	Percorso n. 3	Percorso n. 4	Percorso n. 5	Percorso n. 6	Percorso n. 7	Percorso n. 8	Percorso n. 9	Percorso n. 10
T	C	C	C	C	C	C	C	C	C
C	**T**	C	C	C	C	C	C	C	C
C	C	**T**	C	C	C	C	C	C	C
C	C	C	**T**	C	C	C	C	C	C
C	C	C	C	**T**	C	C	C	C	C
C	C	C	C	C	**T**	C	C	C	C
C	C	C	C	C	C	**T**	C	C	C
C	C	C	C	C	C	C	**T**	C	C
C	C	C	C	C	C	C	C	**T**	C
C	C	C	C	C	C	C	C	C	**T**

Nei casi più complessi, enumerare tutte le combinazioni è molto laborioso, ma con l'aiuto della matematica, è possibile determinare il numero di percorsi distinti, associati a un determinato arrivo.

Quanti sono i percorsi possibili in totale?

A ogni lancio ci sono due modalità (T o C). Con 10 lanci il numero di tragitti per raggiungere tutti gli arrivi è:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{10} = 1.024$$

Quali sono gli arrivi più frequenti?

Dopo che ogni studente ha lanciato 10 volte la moneta e completato il percorso, si riassumono i risultati di tutta la classe, registrandoli sul diagramma a barre del quaderno degli esperimenti. Osservando la distribuzione delle frequenze riportate nel grafico, si può ragionare su quali siano i punti di arrivo più frequenti.

Questi risultati possono essere analizzati anche con le tabelle e i grafici presenti nel file Passeggiata aleatoria, disponibile online.

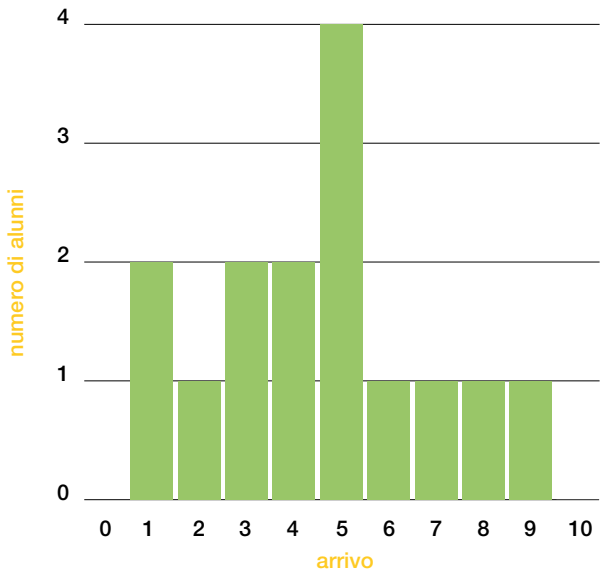
Laboratorio

Esiti di un esperimento in classe

CHI		Arrivo										
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Marco					x						
2	Alessandra		x									
3	Elena			x								
4	Sofia				x							
5	Angela					x						
6	Mattia S.						x					
7	Mattia P.										x	
8	Nicole						x					
9	Natascia						x					
10	Roberta							x				
11	Enrico								x			
12	Manuele						x					
13	Silvia		x									
14	Monica									x		
15	Emma				x							
Totale arrivi		0	2	1	2	2	4	1	1	1	1	0

La riga Totale arrivi contiene le frequenze assolute: il numero di volte in cui è stato raggiunto un determinato punto di arrivo.

Alunni per arrivo



Dal grafico a barre si nota che il punto di arrivo raggiunto più volte, la **moda**, è cinque.
Gli studenti che hanno ottenuto cinque volte testa e cinque volte croce sono quattro.

Seconda parte – Dalle frequenze osservate alla probabilità

L'esperienza procede con il calcolo delle probabilità associate a ciascun arrivo e con l'osservazione delle regolarità in lanci ripetuti (vedi sezione Approfondimento).

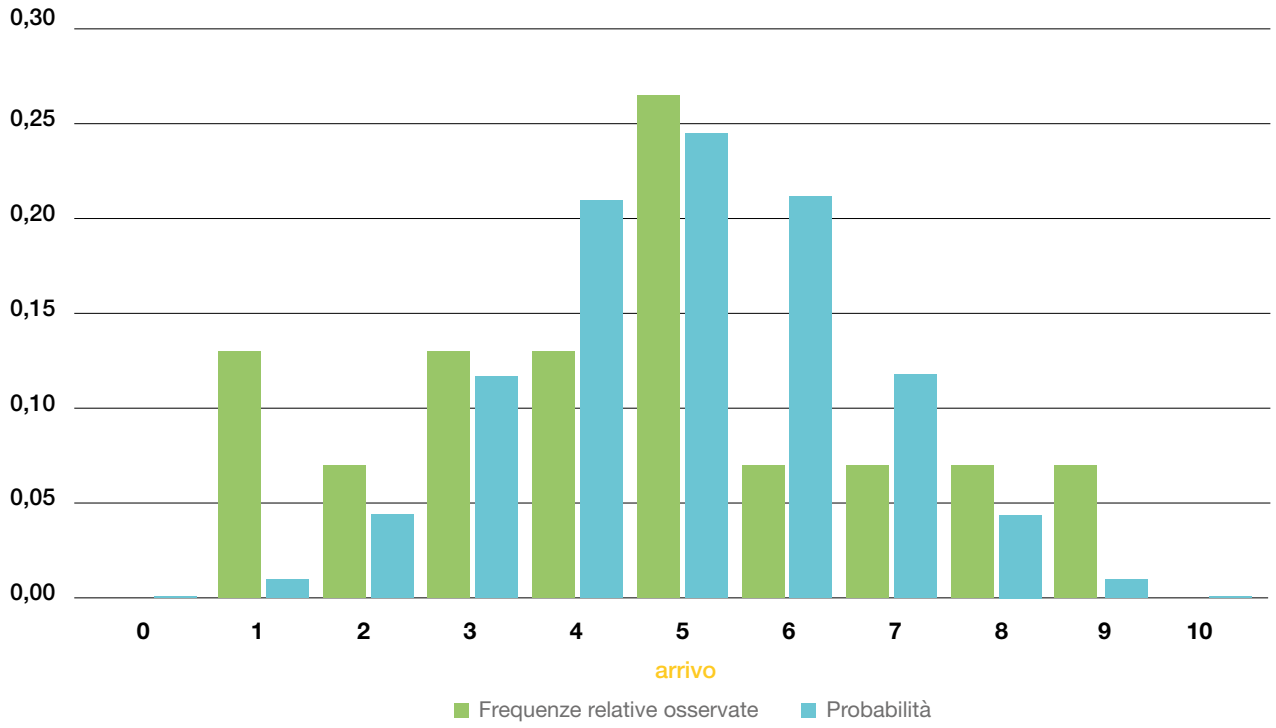
Nel file Passeggiata aleatoria si calcolano le frequenze relative osservate e le probabilità secondo l'interpretazione classica. Successivamente queste vengono rappresentate con un grafico a barre.

Ad esempio, la probabilità associata all'arrivo 1 è:

$$\text{Probabilità (arrivo 1)} = \frac{\text{numero di percorsi che arrivano a 1}}{\text{numero di percorsi possibili}} = \frac{10}{1.024} \simeq 0{,}01$$

Arrivo	Frequenze assolute osservate	Frequenze relative osservate	Percorsi favorevoli	Probabilità
0	0	0	1	0,001
1	2	0,13	10	0,010
2	1	0,07	45	0,044
3	2	0,13	120	0,117
4	2	0,13	210	0,205
5	4	0,27	252	0,246
6	1	0,07	210	0,205
7	1	0,07	120	0,117
8	1	0,07	45	0,044
9	1	0,07	10	0,010
10	0	0	1	0,001
Totale prove	15	1	1.024	1

Confronto frequenze osservate e probabilità



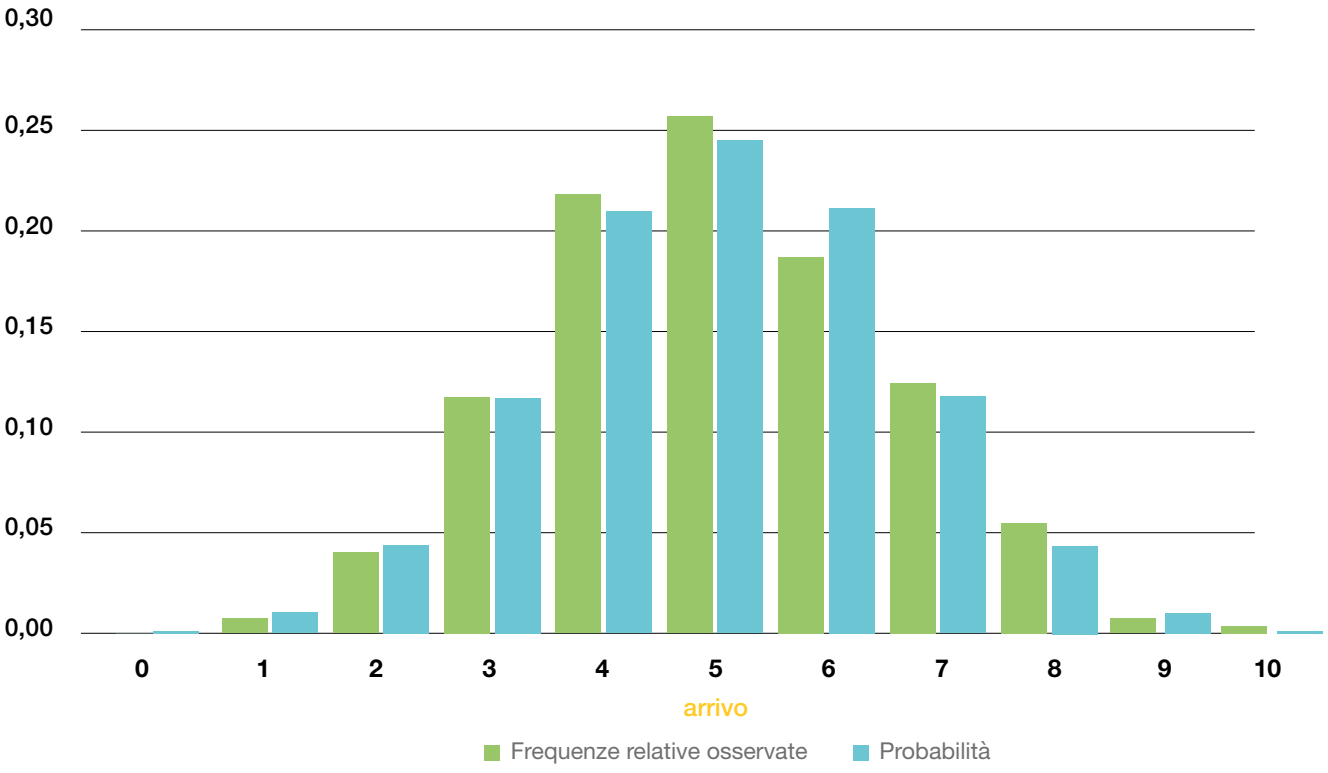
Laboratorio

Come evidenziato nella tabella e nel grafico precedenti, con un numero ridotto di prove (15), le frequenze relative osservate possono differire in modo considerevole dalle probabilità.

Secondo l'interpretazione frequentista, è necessario effettuare numerosi esperimenti, affinché le frequenze relative si avvicinino alle probabilità.

Per osservare questo fenomeno, nel file Passeggiata aleatoria si simulano 1.000 prove, da 10 lanci ciascuna, e si sintetizzano i risultati con una tabella e un diagramma a barre.

Frequenze osservate e probabilità: prove simulate

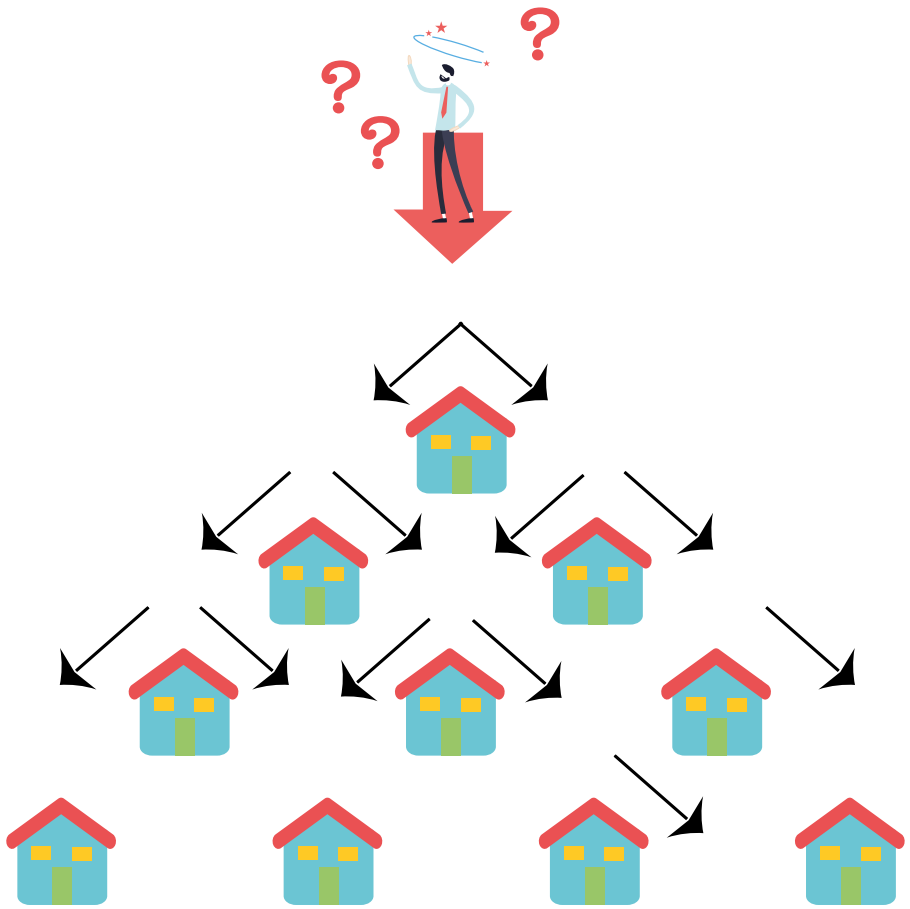


L'osservazione del grafico consente ai ragazzi di confrontarsi in classe e ragionare sulle diverse concezioni di probabilità.

"Nello studio scientifico dei processi casuali, la passeggiata dell'ubriaco rappresenta l'archetipo: ed è anche un modello adatto a descrivere le nostre vite, perché come i granuli di polline che galleggiano nel fluido browniano, anche noi veniamo continuamente sospinti qua e là dagli eventi casuali" (Mlodinow, 2008).

Il laboratorio presenta una versione semplificata di un esempio classico della teoria delle probabilità, noto come **percorso dell'ubriaco** o **passeggiata aleatoria**.

Un ubriaco, partendo dalla porta posta nel vertice superiore di una città a pianta triangolare, deve raggiungere la sua casa che si trova alla base della città. La scelta di girare a destra o a sinistra non è guidata da un ragionamento. L'ubriaco cambia o meno direzione in modo casuale, come se seguisse l'esito del lancio di una moneta. Questo percorso è chiamato passeggiata aleatoria o casuale.



In quale casa arriverà l'ubriaco?

L'ubriaco arriverà certamente a una delle case poste alla base della città: nessuna casa è impossibile da raggiungere. Per calcolare le probabilità associate all'arrivo nelle diverse case, è necessario iniziare con il determinare quanti sono in totale i modi per raggiungerle.

Approfondimento

Nella figura seguente ogni bivio della città è identificato da una lettera e dal numero di percorsi per raggiungerlo. I bivi o gli incroci sono disposti su livelli diversi. A ogni lancio della moneta, l'ubriaco si sposta al livello successivo. Se si considerano solamente cinque lanci, i livelli sono sei, numerati da 0 (partenza) a 5 (arrivo).
Considerando il livello 3, per arrivare in H, i percorsi distinti sono tre, ovvero A-B-D-H, A-B-E-H, A-C-E-H, mentre i percorsi totali che portano al livello sono 8.

Incroci della città e numero di percorsi possibili

Quanti sono i percorsi distinti per raggiungere ciascuna lettera?

Un modo semplice per contarli è analizzare per ogni livello un incrocio alla volta.

Livello 0 - Partenza

La lettera A indica la porta di accesso alla città. È una tappa obbligata. Per arrivarci vi è una sola possibilità.

Partenza

Livello 0					A						
Livello 1				B			C				
Livello 2			D			E			F		
Livello 3		G			H			I			J
Livello 4	K			L			M			N			O
Livello 5	P		Q			R			S			T			U
	0		1			2			3			4			5

Arrivo

Partenza

												Percorsi possibili
Livello 0					1							$2^0 = 1$
Livello 1				1			1					$2^1 = 2$
Livello 2			1			2			1			$2^2 = 4$
Livello 3		1			3			3			1	$2^3 = 8$
Livello 4	1			4			6			4			1	$2^4 = 16$
Livello 5	1		5			10			10			5			1	$2^5 = 32$
	0		1			2			3			4			5	

Arrivo

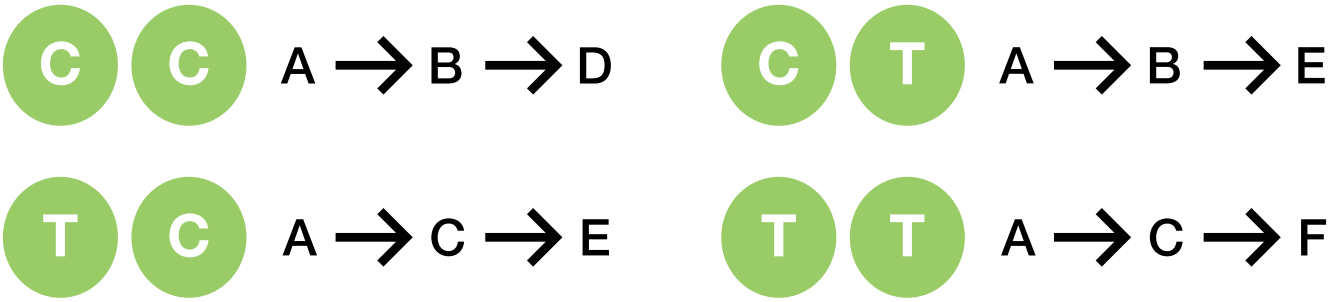
Livello 1

Superata la porta, l'ubriaco può andare a destra (arrivando in C) o a sinistra (arrivando in B).
I percorsi totali del livello 1 sono 2. I risultati della moneta sono testa (destra) o croce (sinistra).

Livello 2

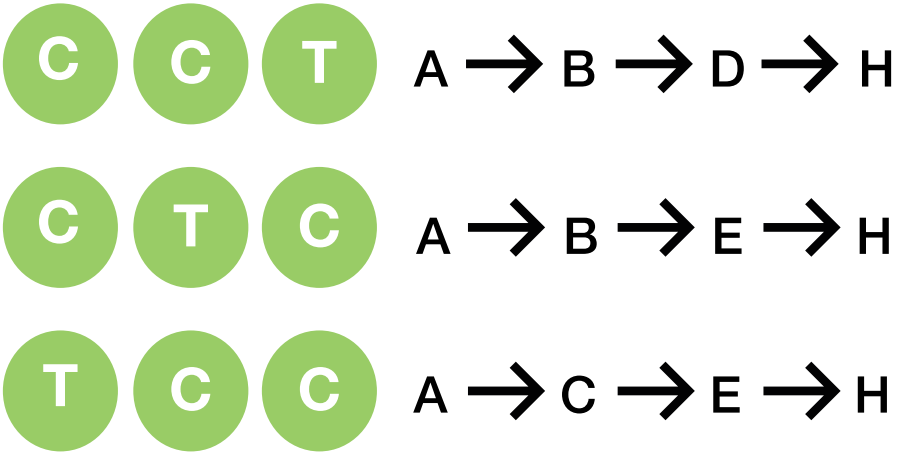
Arrivato in B, l'ubriaco può andare di nuovo a destra (E) o a sinistra (D). Se, invece, si trova in C, può proseguire in E oppure in F.

In D arriva con un solo percorso (A-B-D), ad E portano due vie, ovvero A-B-E oppure A-C-E.
F è raggiungibile in un solo modo: A-C-F. Il totale dei percorsi è 4 (1+2+1).



Livello 3

Continuando così, in G si arriva con un solo percorso, A-B-D-G. In H si può giungere sia da D che da E, con tre percorsi in tutto: quello che passa per D più i due di E, A-B-D-H, A-B-E-H, A-C-E-H.



I ragionamenti sono analoghi per I (3 percorsi possibili) e J (un solo percorso).
Il totale dei percorsi è 8 (1+3+3+1).

Approfondimento

Nel laboratorio, per contare tutti i percorsi, si procede in modo analogo, sino al livello 10.
Per ottenere il medesimo risultato, si può utilizzare il triangolo di Tartaglia.

Partenza

											Percorsi possibili
					1						$2^0 = 1$
				1		1					$2^1 = 2$
			1		2		1				$2^2 = 4$
		1		3		3		1			$2^3 = 8$
	1		4		6		4		1		$2^4 = 16$
1		5		10		10		5		1	$2^5 = 32$
	1		6		15		20		15		6		1		$2^6 = 64$
		1		7		21		35		35		21		7		1			$2^7 = 128$
			1		8		28		56		70		56		28		8		1			$2^8 = 256$
		1		9		36		84		126		126		84		36		9		1		$2^9 = 512$
1		10		45		120		210		252		210		120		45		10		1	$2^{10} = 1.024$
0		1		2		3		4		5		6		7		8		9		10	

Arrivo

Ciascun quadrato dello schema ha associato un valore che rappresenta il numero di modi in cui può essere raggiunto, partendo dal vertice del triangolo.

I numeri alla base del triangolo (1, 10, 45…) sono i percorsi favorevoli per raggiungere i corrispondenti arrivi. La somma dell'ultima riga è 1.024, cioè il totale dei percorsi possibili.

L'arrivo 5, che in termini di lanci significa cinque teste e cinque croci, è raggiungibile attraverso 252 tragitti il valore più alto. Questo punto di arrivo è il più facile da ottenere ovvero il più probabile.

Il triangolo di Tartaglia (o di Pascal) deve il suo nome ai due studiosi che lo utilizzarono per risolvere problemi matematici. Si costruisce, a partire dalla sommità, inserendo il numero 1. Per le righe seguenti, si procede ponendo agli estremi sempre 1, mentre i numeri interni si ottengono sommando i due numeri posti immediatamente sopra (Easaway, Wyndham, 2003).

Cenni sulla probabilità

La probabilità è associata a qualsiasi situazione in cui è necessario fare previsioni o prendere decisioni in condizioni di incertezza. Per questo essa svolge un ruolo cruciale in tutte le scienze.

Sono state date diverse interpretazioni della probabilità. Di seguito, verrano approfondite la classica, la frequentista e la soggettiva.

Quando si effettua un esperimento, l'insieme di tutti i possibili esiti è chiamato **spazio campionario** o spazio degli **eventi elementari**.

La dimensione dello spazio campionario è il numero degli elementi che lo compongono.

Per **evento**, si intende qualsiasi fatto o avvenimento che può essere osservato.

Nel lancio di una sola moneta, gli unici eventi possibili sono che esca testa o che si ottenga croce. Quindi, si può affermare che gli eventi elementari sono solamente due. Due è la dimensione dello spazio campionario.

Per quantificare l'incertezza associata al lancio della moneta, si utilizza il calcolo delle **probabilità**. Convenzionalmente, la probabilità è misurata su una scala da 0 a 1, estremi inclusi. Il valore zero corrisponde a un **evento impossibile**, in cui non esce né testa né croce. Il valore uno è associato all'**evento certo**, in cui esce una delle due facce della moneta.

Come si calcola la probabilità di un evento?

Interpretazione classica

Secondo l'interpretazione classica, la probabilità del verificarsi di un evento A è determinata dal seguente rapporto:

$$\text{Probabilità (Evento A)} = \frac{\text{numero di casi favorevoli all'evento A}}{\text{numero di casi possibili}}$$

Nel lancio di una moneta, la probabilità che esca testa è data dal rapporto fra 1 (caso favorevole) e 2 (casi possibili):

$$\text{Probabilità (Testa)} = \frac{1}{2}$$

Per l'evento certo, i casi favorevoli sono 2, perché si accetta sia che esca testa, sia che esca croce. La sua probabilità è data da:

$$\text{Probabilità (Testa o Croce)} = \frac{2}{2}$$

Approfondimento

Come si calcola la probabilità di arrivo in ciascuna casa?

Applicando l'interpretazione classica alla pianta della città vista in precedenza, si può osservare che il numero dei percorsi per raggiungere un determinato incrocio corrisponde ai **casi favorevoli**. Il conteggio di tutti i percorsi che portano agli incroci del medesimo livello rappresenta la totalità dei **casi possibili**.

Per raggiungere il livello 10 (arrivo) sono necessari dieci lanci. In questo caso i tragitti distinti sono 1.024 e differiscono tra loro sia per il numero di teste (o di croci) che per l'ordine con cui queste compaiono.

La probabilità che su 10 lanci esca una testa (arrivo 1) è data dal rapporto fra i casi favorevoli, vale a dire tutte le combinazioni con una testa e nove croci, e i casi possibili:

$$\text{Probabilità (1 testa e 9 croci)} = \frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}} = \frac{10}{1.024} \simeq 0{,}01$$

La probabilità di avere cinque teste e cinque croci (arrivo 5) è circa 0,25:

$$\text{Probabilità (5 teste e 5 croci)} = \frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}} = \frac{252}{1.024} \simeq 0{,}25$$

Se le facce della moneta non fossero equiprobabili, come si potrebbe determinare la probabilità di arrivo in ciascuna casa?

Nell'Ottocento un gruppo di studiosi osservò che spesso non si è in grado né di individuare i casi possibili né di valutare l'equiprobabilità degli eventi.

Da ciò derivarono gli studi che nel 1928 portarono il matematico e filosofo Richard Von Mises a formulare l'**interpretazione frequentista** della probabilità, **secondo la quale la probabilità di un evento corrisponde alla frequenza relativa osservata in un gran numero di prove condotte nelle medesime condizioni** (ad esempio il numero di volte in cui è stato osservato l'evento, una testa e nove croci, sul totale delle prove effettuate).

L'interpretazione frequentista dà un significato pratico e molto intuitivo alla probabilità. Al crescere del numero delle prove condotte tutte nelle stesse condizioni, **la frequenza relativa tende al valore della probabilità dell'evento**.

Pertanto, la probabilità frequentista è determinata a posteriori sulla base dell'esame dei dati osservati.

Se si applica questa interpretazione ai risultati delle simulazioni effettuate durante il laboratorio, la frequenza relativa osservata è una misura della probabilità dell'evento.

Riprendendo l'esempio precedente, ci si aspetta che all'aumentare del numero di prove, l'evento cinque teste e cinque croci si verifichi in un caso su quattro.

Interpretazione soggettiva

L'interpretazione classica e quella frequentista non sono sempre applicabili. Esistono situazioni in cui non è possibile misurare la probabilità di un evento, né calcolando il rapporto tra casi favorevoli e casi possibili (interpretazione classica), nè effettuando una serie numerosa di osservazioni per determinare il rapporto tra il numero di casi osservati e il numero di prove fatte (interpretazione frequentista).

L'interpretazione soggettiva introduce un concetto più ampio di probabilità che si basa sull'esperienza, le informazioni a disposizione o l'intuizione.

Se all'inizio del laboratorio si chiedesse ai ragazzi di scommettere su un punto di arrivo, le loro risposte sarebbero un esempio di probabilità soggettiva. Questa, infatti, traduce numericamente il grado di fiducia di una persona nel verificarsi di un evento incerto.

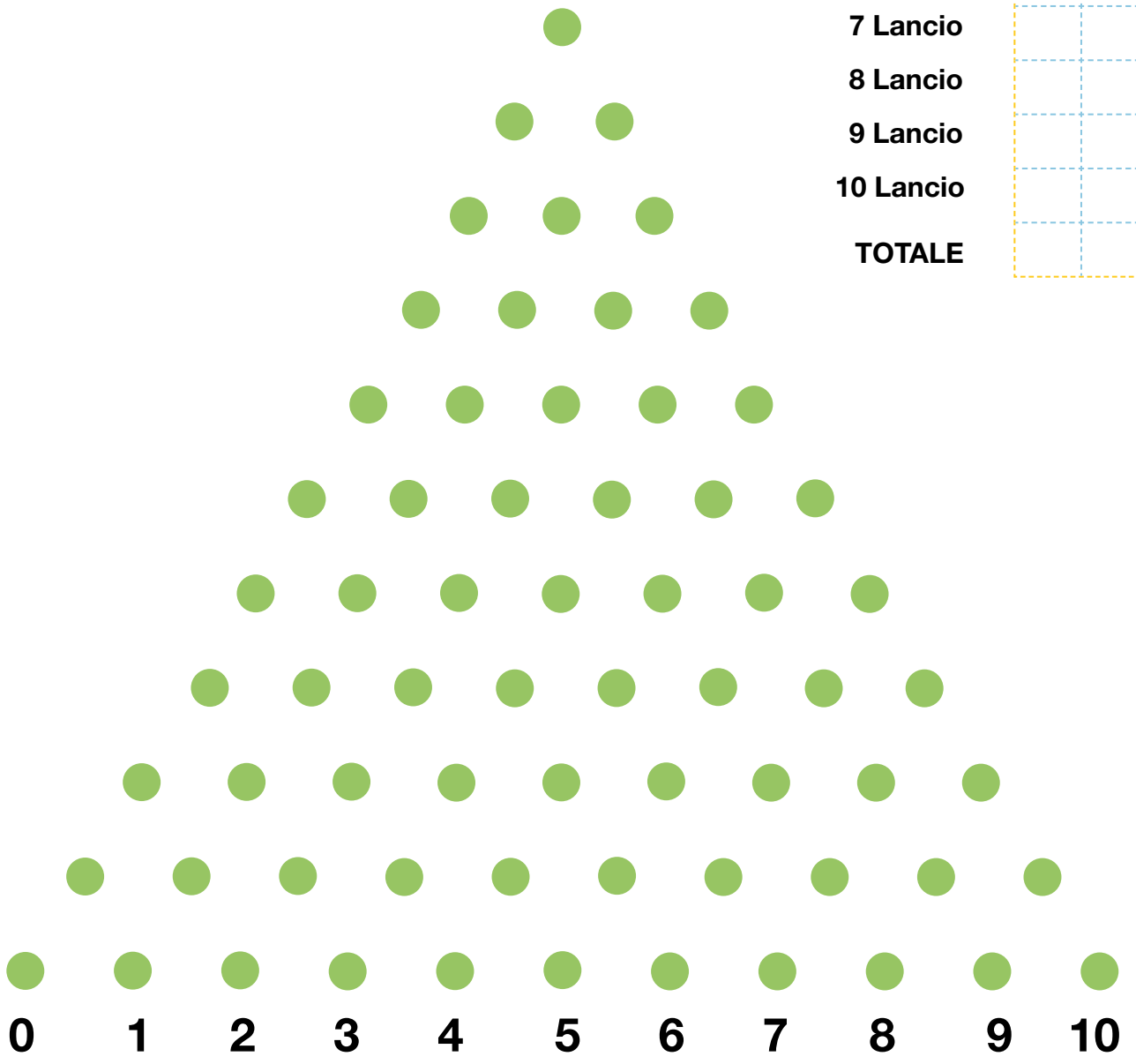
Al termine dell'attività, l'acquisizione di nuove conoscenze consente loro di formulare una nuova valutazione della probabilità di un arrivo e quindi di confermare o meno la scelta iniziale.

IL QUADERNO DEGLI ESPERIMENTI DI

Lancia 10 volte la moneta

- Registra i risultati nella tabella
- Disegna il percorso a zig zag
- Parti dalla freccia
- Vai a DESTRA, se esce TESTA
- Vai a SINISTRA, se esce CROCE

	T	C
1 Lancio		
2 Lancio		
3 Lancio		
4 Lancio		
5 Lancio		
6 Lancio		
7 Lancio		
8 Lancio		
9 Lancio		
10 Lancio		
TOTALE		



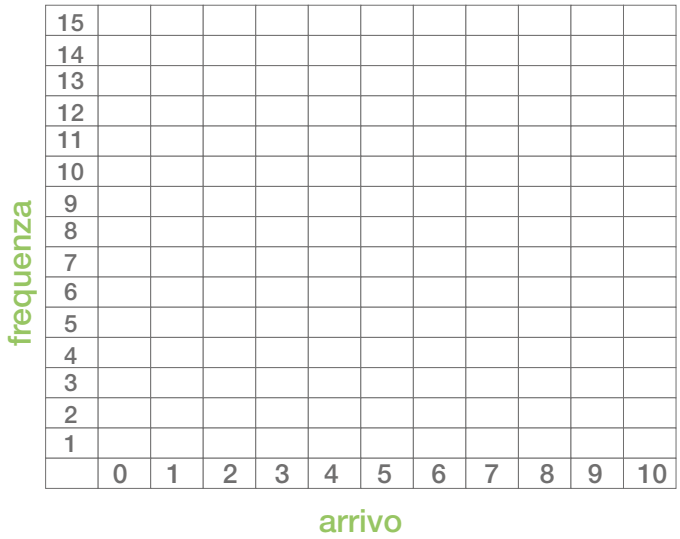
I risultati della classe

Cosa voglio capire:

Cosa ho fatto:

Cosa voglio misurare:

lancio della moneta



Quali misure statistiche possiamo calcolare:

Cosa possiamo concludere:

Campo di variazione (o range): differenza tra il massimo e il minimo delle modalità osservate per un carattere quantitativo.

Carattere statistico: (vedi variabile statistica)

Densità di frequenza (assoluta, relativa, percentuale): rapporto tra la frequenza (assoluta, relativa, percentuale) e l'ampiezza della classe. Nell'istogramma corrisponde all'altezza dei rettangoli (barre).

Diagramma ramo-foglia: rappresentazione di dati quantitativi che riunisce le proprietà di una tabella di frequenze e di un grafico. Si costruisce dividendo ogni singolo valore in due parti: la prima, che si ritiene più significativa, chiamata ramo, e la seconda, più di dettaglio, chiamata foglia. I rami sono disposti in colonna, in ordine crescente dall'alto verso il basso e senza valori ripetuti. Le foglie sono collocate nella riga corrispondente al proprio ramo, in ordine crescente. Il numero delle foglie corrisponde al numero di osservazioni, per questo motivo la costruzione e la lettura del grafico risulta più agevole con piccole collezioni di dati.

Dot plot: grafico a punti simile a un diagramma a barre, utilizzato in statistica quando il set di dati è relativamente piccolo e le modalità sono discrete.

Esperimento casuale: un qualsiasi fenomeno che possa essere osservato e misurato su una pluralità di possibili risultati, come ad esempio il lancio di un dado o di una moneta.

Evento: qualsiasi fatto o avvenimento che può essere osservato.

Evento certo: evento che si verifica con certezza e ha probabilità pari a uno.

Evento elementare: uno dei possibili esiti di un esperimento casuale.

Evento impossibile: evento che non può mai realizzarsi e ha probabilità uguale a zero.

Eventi incompatibili (disgiunti): eventi che non possono verificarsi contemporaneamente.

Eventi indipendenti: eventi in cui il verificarsi dell'uno non modifica la probabilità di verificarsi dell'altro.

Fenomeno collettivo: fenomeno che viene studiato attraverso l'osservazione o la misurazione di una o più caratteristiche (variabili statistiche) su un insieme di unità statistiche.

Frequenza assoluta: il numero di unità statistiche che presentano la stessa modalità del carattere (variabile statistica) considerato. La somma delle frequenze assolute è pari al totale delle unità statistiche.

Frequenza relativa: rapporto tra la frequenza assoluta e il totale delle unità statistiche.

Frequenza percentuale: rapporto tra la frequenza assoluta e il totale delle unità statistiche, moltiplicato per cento.

Indagine statistica: insieme delle operazioni che permettono di conoscere le caratteristiche delle unità statistiche che compongono una determinata popolazione.

Istogramma: diagramma cartesiano, utilizzato per rappresentare una variabile quantitativa continua raggruppata in classi. Il grafico è costituito da rettangoli, non distanziati, con base uguale all'ampiezza della classe e area proporzionale alla corrispondente frequenza osservata.

Grafico a barre: diagramma composto da una successione di rettangoli verticali (barre), ordinati da sinistra verso destra, aventi tutti la stessa base, ma altezze proporzionali alla frequenza osservata.

Grafico a torta: diagramma di forma circolare. La superficie è suddivisa in tanti settori circolari o spicchi, quante sono le modalità, i corrispondenti angoli al centro sono proporzionali

alla frequenza osservata.

Massimo: ultimo valore di una distribuzione di dati ordinata in modo crescente. È il più grande valore osservato.

Media aritmetica: indice statistico che si ottiene sommando tutti i valori osservati e dividendoli per il numero di unità statistiche.

Mediana: modalità che divide in due parti di uguale numerosità la graduatoria delle osservazioni.

Minimo: primo valore di una distribuzione di dati ordinata in modo crescente. È il più piccolo valore osservato.

Modalità: modi in cui si può manifestare la variabile (o carattere) nelle unità statistiche. Se la variabile è quantitativa, si può esprimere con dei numeri, è misurabile e le modalità possono essere raggruppate in classi. Se, invece, è qualitativa, le modalità sono descrizioni verbali o attributi.

Moda: modalità che si presenta con la frequenza più elevata.

Piramide delle età: rappresentazione grafica della struttura per età e sesso di una popolazione.

Pittogramma: diagramma realizzato con simboli, che rimandano al fenomeno rappresentato, ripetuti in misura pari alla frequenza o alla quantità del carattere in analisi (diagramma a figure ripetute). È possibile costruirlo anche attribuendo agli oggetti o alle figure dimensioni diverse in proporzione alle frequenze osservate.

Probabilità classica: numero compreso tra zero e uno, associato al verificarsi di un evento, ottenuto come rapporto tra il numero dei casi favorevoli all'evento e il numero dei casi possibili, purché siano tutti ugualmente probabili.

Probabilità frequentista: numero compreso tra zero e uno, associato al verificarsi di un evento, pari al limite cui tende la frequenza relativa osservata in un gran numero di prove effettuate nelle medesime condizioni.

Probabilità soggettiva: valore che traduce numericamente un'opinione personale o in altre parole un giudizio sul verificarsi di un evento incerto in base alle informazioni a disposizione.

Range: (vedi campo di variazione)

Spazio campionario: è l'insieme di tutti i possibili esiti (eventi elementari) di un esperimento casuale.

Tabella di frequenza semplice: schema che riassume in modo ordinato e sintetico come si distribuisce una variabile all'interno di una popolazione. Essenzialmente è costituita da due colonne (modalità e frequenza) e da tante righe quante sono le modalità del carattere in esame.

Tabella di frequenza doppia: una tabella di frequenza che sintetizza come si distribuiscono due caratteri simultaneamente all'interno di una popolazione.

Unità statistica: unità elementare su cui vengono osservati i caratteri attraverso cui si manifesta il fenomeno oggetto di studio; esempi di unità statistiche sono persone, animali, abitazioni, libri, imprese, ecc.

Variabile statistica (o carattere): caratteristica attraverso cui il fenomeno osservato si manifesta in modo differente in ciascuna delle unità statistiche considerate (colore dei capelli, altezza, preferenze alimentari, età, ecc.). Le variabili statistiche possono essere di tipo quantitativo o qualitativo. I caratteri quantitativi si distinguono in discreti, se assumono un numero finito o numerabile di valori, e continui, se assumono tutti i valori di un intervallo di numeri reali. I caratteri qualitativi, invece, sono definiti sconnessi, se le modalità non sono ordinabili, oppure ordinali, se le modalità posseggono naturalmente un ordine (titolo di studio, giudizi verbali, ecc.).

Martin, Édouard Labiche, Eugène (1862). *La gamba del Capitano Tic*, commedia in tre Atti. Trieste: Colombo Coen Tipografo-Editore.

Legge 9 luglio 1926, n. 1162, *Riordinamento del servizio statistico*, Gazzetta Ufficiale n. 161 del 14-7-1926.

Progetto Nuffield per la matematica (1968). *Se faccio, capisco*. Bologna: Zanichelli Scuola.

Barnett, Vic (1983). *Why teach statistics?*. In Proceedings of the International Conference on Teaching Statistics (1st, University of Sheffield, England, August 9-13, 1982), Organising Committee of the First International Conference on Teaching Statistics.

Leti, Giuseppe (1983). *Statistica descrittiva*. Bologna: Il Mulino.

Istat (1986). *Informazione statistica: «Parliamone con l'Istat»*. Roma.

Decreto legislativo 6 settembre 1989, n. 322, *Norme sul Sistema statistico nazionale e sulla riorganizzazione dell'Istituto nazionale di statistica, ai sensi dell'art. 24 della legge 23 agosto 1988, n. 400*, Gazzetta Ufficiale n. 222 del 22-9-1989.

Istat (1989). *Manuale di tecniche di indagine. 7 - le rappresentazioni grafiche di dati statistici*. In Note e Relazioni, n. 1. Roma.

Eastaway, Rob - Wyndham, Jeremy (2003). *Probabilità, numeri e code. La matematica nascosta nella vita quotidiana*. Bari: Edizioni Dedalo.

Mpi (2007). *Indicazioni per il curriculo per la scuola dell'infanzia e per il primo ciclo d'istruzione*. Napoli: Tecnodid Editrice.

Finessi, Beppe Meneguzzo, Marco (2008). *Bruno Munari*. Cinisello Balsamo: Silvana Editoriale.

Mlodinow, Leonard (2008). *The Drunkard's Walk. How Randomness Rules Our Lives*. London: Penguin Books.

Ross, Sheldon M. (2008). *Introduzione alla statistica*. Milano: Apogeo.

Decreto del Presidente della Repubblica, 7 settembre 2010, n. 166, *Regolamento recante il riordino dell'Istituto nazionale di statistica*, Gazzetta Ufficiale - Serie Generale n. 235 del 7-9-2010.

Bocci, Laura - Mingo, Isabella (2012). *Statistiche. Istruzioni per l'uso. Fonti e strumenti per l'analisi dei dati*. Roma: Edizioni Nuova Cultura.

McKenny,Timothy S. - Foley, Gregory D. (2012). *Tales, Tasks Tools and Talk*. In «Teaching Children Mathematics», vol. 19, n. 5.

Miur (2012). *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*. In «Annali della Pubblica Istruzione», Numero speciale, Anno LXXXVIII. Firenze: Le Monnier.

Ross, Sheldon M. (2013). *Calcolo delle probabilità*. Milano: Apogeo.

Borra, Simone - Di Ciaccio, Agostino (2014). *Statistica. Metodologie per le scienze economiche e sociali*. New York: McGraw-Hill Education.

Decreto legislativo 25 novembre 2016, n. 218, *Semplificazione delle attività degli enti pubblici di ricerca ai sensi dell'articolo 13 della legge 7 agosto 2015, n. 124*, Gazzetta Ufficiale - Serie Generale n. 276 del 25-11-2016.

Istat (2016). *Il programma di modernizzazione dell'Istat*, 28 gennaio 2016, https://www.istat.it/it/files//2010/12/Programma_modernizzazione_Istat2016.pdf.

Istat (2017). Le streghe di Bayes e altre storie. Fiabe statistiche per bambine e bambini curiosi. Roma.

Miur (2018). *Indicazioni nazionali e nuovi scenari*. Roma.

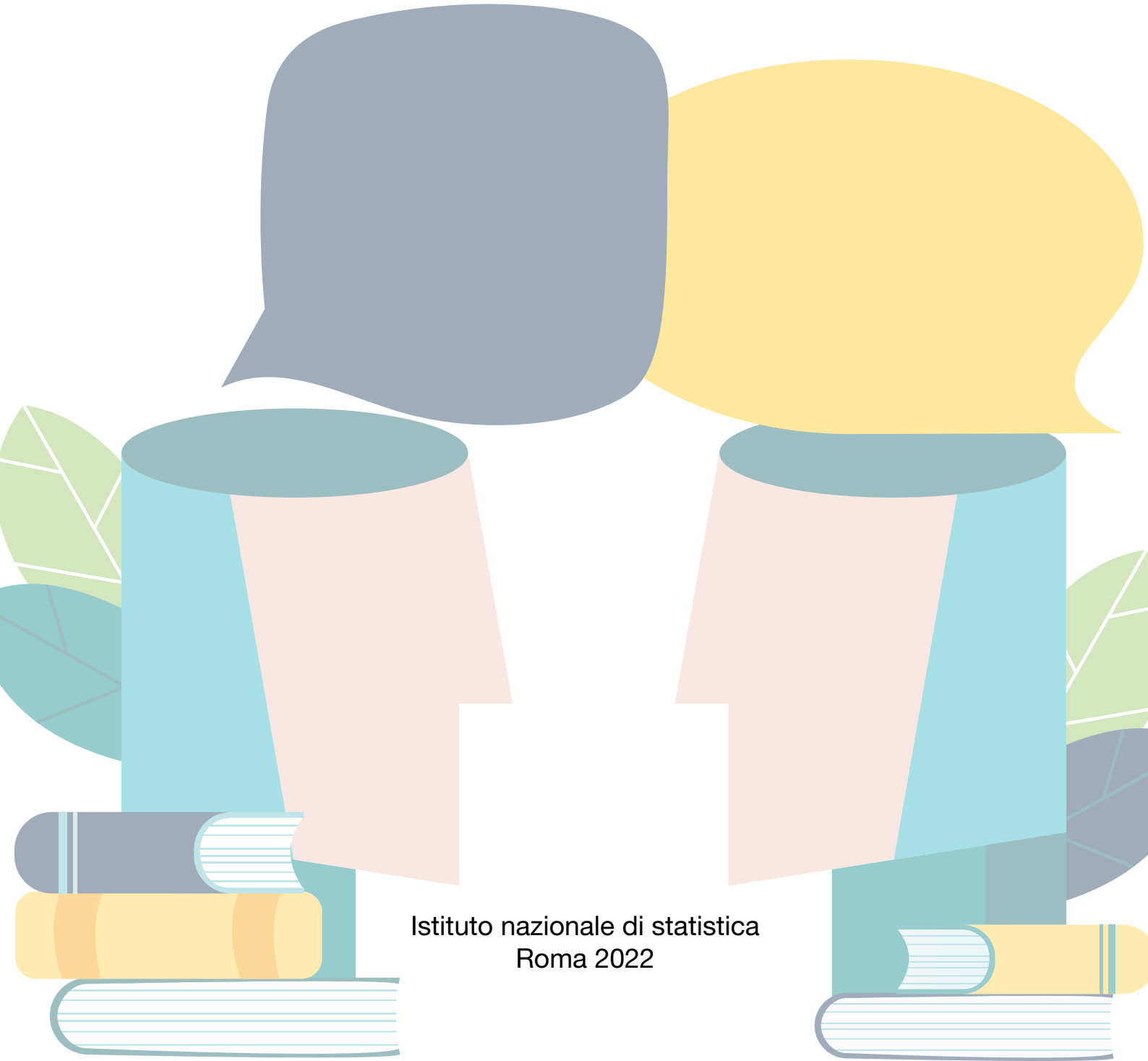
Istat (2019). *Open data*, 26 agosto 2019, https://www.istat.it/it/dati-analisi-e-prodotti/open-data.

Istat (2019). Il pavone della pioggia e altre storie. Fiabe statistiche per bambine e bambini curiosi. Roma.

Staccioli, Gianfranco (2019). *Giocare a imparare. Per una scuola di-vertente*. Firenze: Giunti Scuola.

Istat (2020). *Glossario statistico*, https://www.istat.it/it/metodi-e-strumenti/glossario.

Istat (2021). *Codice italiano per la qualità delle statistiche ufficiali*, Deliberazione 16 dicembre 2021, Direttiva n. 12/Comstat, Gazzetta Ufficiale 29 gennaio 2022, n. 23.



Istituto nazionale di statistica
Roma 2022